3 直線の方程式

1 直線の方程式

1. 一般形　$ax+by+c=0$　$[a \neq 0$ または $b \neq 0]$
2. 点 $(x_1,\ y_1)$ を通り　[1] 傾きが m　$y-y_1=m(x-x_1)$　　[2] x 軸に垂直　$x=x_1$
3. 異なる2点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ を通る直線

   $x_1 \neq x_2$ のとき　$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$,　　$x_1=x_2$ のとき　$x=x_1$

   参考　一般に　$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$
4. x 切片が a, y 切片が b である直線　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$　$[a \neq 0,\ b \neq 0]$

STEP A

165 次の方程式の表す直線を座標平面上にかけ。

(1) $3x-2y+6=0$　　(2) $4x+8=0$　　(3) $-3y+8=0$

166 次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(-2,\ 3)$ を通り，傾きが2　　*(2) 点 $(5,\ -4)$ を通り，傾きが $-\dfrac{3}{4}$

*(3) 点 $(4,\ 6)$ を通り，x 軸に垂直　　(4) 点 $(3,\ 2)$ を通り，x 軸に平行

167 次の2点を通る直線の方程式を求めよ。

*(1) $A(-4,\ 3)$, $B(6,\ -3)$　　(2) $A(3,\ -4)$, $B(-1,\ 0)$

*(3) $A(-2,\ 4)$, $B(-2,\ -1)$　　(4) $A(2,\ 5)$, $B(-3,\ 5)$

*(5) $A(-3,\ 0)$, $B(0,\ 5)$

STEP B

例題 15　3点 $A(1,\ 2)$, $B(3,\ 1)$, $C(t,\ -1)$ が一直線上にあるとき，t の値を求めよ。

指針　3点A，B，Cが一直線上にある $\Longleftrightarrow$ 2点を通る直線上に第3の点がある

解答　直線ABの方程式は　$y-2=\dfrac{1-2}{3-1}(x-1)$　　すなわち　$x+2y-5=0$

点 $C(t,\ -1)$ がこの直線上にあるから　$t+2\cdot(-1)-5=0$　　よって　$t=7$　答

168 次の3点が一直線上にあるとき，t の値を求めよ。

(1) $(-2,\ 6)$, $(0,\ 3)$, $(4,\ t)$　　*(2) $(1,\ 4)$, $(-1,\ t)$, $(t,\ 2)$

4 2直線の関係

1 2直線の平行と垂直

1. 2直線 $y=m_1x+n_1$, $y=m_2x+n_2$ について

   2直線が平行 $\Longleftrightarrow$ $m_1=m_2$,　　2直線が垂直 $\Longleftrightarrow$ $m_1m_2=-1$
2. 2直線 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ について

   2直線が平行 $\Longleftrightarrow$ $ab'-ba'=0$,　　2直線が垂直 $\Longleftrightarrow$ $aa'+bb'=0$

2 点と直線の距離

点 $P(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は　$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3 2直線の交点を通る直線の方程式

2直線 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ が交わるとき，方程式

$k(ax+by+c)+(a'x+b'y+c')=0$ (k は定数) は2直線の交点を通る直線を表す。

STEP A

169 次の2直線は，それぞれ平行，垂直のいずれであるか。

*(1) $y=2x+3$, $y=2x-4$　　(2) $y=3x+4$, $y=-\dfrac{1}{3}x+5$

*(3) $x-y+2=0$, $x+y-6=0$　　(4) $6x-4y+3=0$, $6y=9x+4$

170 次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(6,\ 4)$ を通り，次の直線に平行な直線，垂直な直線

(ア) $y=3x+2$　　(イ) $y=-1$　　(ウ) $x=2$

*(2) 点 $(-2,\ 3)$ を通り，直線 $3x-5y-12=0$ に平行な直線，垂直な直線

171 次の連立方程式が，ただ1組の解をもつ，解をもたない，無数の解をもつための必要十分条件を，それぞれ求めよ。

$$3x-2y+4=0,\quad ax+3y+c=0$$

172 次の直線に関して，点 $A(-3,\ 5)$ と対称な点の座標を求めよ。

(1) $y=x$　　*(2) $3x-2y+12=0$

173 次の直線と，原点および点 $(1,\ 2)$ との距離を，それぞれ求めよ。

(1) $y=3x+1$　　*(2) $4x+3y=2$　　(3) $y=4$　　*(4) $x=-1$

STEP B

*174 2点 A$(-1,\ 4)$, B$(3,\ 2)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

175 3点 A$(3,\ 4)$, B$(0,\ 0)$, C$(5,\ 0)$ を頂点とする △ABC について，次の3直線の方程式をそれぞれ求めよ。また，それらが1点で交わることを示し，その交点の座標を求めよ。

(1) 各辺の垂直二等分線　　(2) 各頂点から対辺に下ろした垂線

例題 16 2直線 $3x-(a-3)y-6=0$, $(a+1)x+y-1=0$ が次の条件を満たすとき，定数 a の値をそれぞれ求めよ。

(1) 平行である。　　(2) 垂直である。

指針 2直線 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ について

2直線が平行 $\iff ab'-ba'=0$,　2直線が垂直 $\iff aa'+bb'=0$

解答 (1) 2直線が平行であるための必要十分条件は　$3\cdot1-\{-(a-3)\}(a+1)=0$

すなわち　$a^2-2a=0$　ゆえに　$a(a-2)=0$

よって　$\boldsymbol{a=0,\ 2}$ 答

(2) 2直線が垂直であるための必要十分条件は　$3(a+1)+\{-(a-3)\}\cdot1=0$

すなわち　$2a+6=0$　よって　$\boldsymbol{a=-3}$ 答

*176 2直線 $x+ay+1=0$, $ax+(a+2)y+3=0$ が次の条件を満たすとき，定数 a の値をそれぞれ求めよ。

(1) 平行である。　　(2) 垂直である。

*177 3直線 $x+3y=2$, $x+y=0$, $ax-2y=-4$ が三角形を作らないような定数 a の値を求めよ。

178 直線 $y=2x$ を ℓ とするとき，次のものを求めよ。

(1) ℓ に関して，点 A$(5,\ 0)$ と対称な点Bの座標

(2) ℓ に関して，直線 $3x+y=15$ と対称な直線の方程式

ヒント

177 ▶ 三角形を作らない ⟶ 2直線が平行，または3直線が1点で交わる。

178 ▶ (2) 求める直線は，2直線 ℓ, $3x+y=15$ の交点と点Bを通る。

*179 k を定数とする。直線 $(k+2)x+(2k-3)y=5k-4$ は，k の値に関係なく定点を通る。その定点の座標を求めよ。

例題 17 2直線 $x+2y-10=0$, $2x+3y-7=0$ の交点を通り，点 $(5,\ 6)$ を通る直線の方程式を求めよ。

指針 方程式 $k(ax+by+c)+(a'x+b'y+c')=0$ （k は定数）は2直線 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ の交点を通る直線を表す。

解答 k を定数として，方程式 $k(x+2y-10)+(2x+3y-7)=0$ …… ①

を考えると，① は2直線 $x+2y-10=0$, $2x+3y-7=0$ の交点を通る直線を表す。

直線 ① が点 $(5,\ 6)$ を通るとき　$k(5+2\cdot6-10)+(2\cdot5+3\cdot6-7)=0$

よって　$k=-3$

この k の値を ① に代入して整理すると　$\boldsymbol{x+3y-23=0}$ 答

参考 2直線の交点の座標を求め，その交点と点 $(5,\ 6)$ を通る直線の方程式を求めてもよい。

180 2直線 $8x+7y-19=0$, $3x-5y+6=0$ の交点を通り，点 $(-4,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

*181 2直線 $x-y+1=0$, $3x+2y-12=0$ の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を，それぞれ求めよ。

(1) 直線 $5x-6y-8=0$ に平行である。

(2) 直線 $5x-6y-8=0$ に垂直である。

182 3直線 $x-y=1$, $2x-3y=1$, $ax+by=1$ が1点で交わるならば，3点 $(1,\ -1)$, $(2,\ -3)$, $(a,\ b)$ は一直線上にあることを証明せよ。

183 次のような三角形の面積を求めよ。

(1) 3点 $(-2,\ 1)$, $(2,\ -1)$, $(0,\ 4)$ を頂点とする三角形

*(2) 3直線 $x-3y=-5$, $4x+3y=-5$, $2x-y=5$ で作られる三角形

*184 平面上の2点を A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 3)$ とする。点Pが放物線 $y=x^2+4x+11$ 上を動くとき，△PAB の面積の最小値を求めよ。

ヒント

179 ▶ 直線の方程式を k について整理。k についての恒等式と考える。

183 ▶ △ABC において，底辺を線分 BC，高さを点Aと直線 BC の距離とみる。

184 ▶ 点Pと直線 AB の距離 d が最小となるとき，面積は最小となる。

第2節　円

5 円の方程式

1 円の方程式

1. 中心 $(a,\ b)$，半径 r の円の方程式は　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
2. **一般形**　方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ $(l^2+m^2-4n>0)$ は円を表す。

注意　$l^2+m^2-4n=0$ ならば1点を表し，$l^2+m^2-4n<0$ ならば表す図形はない。

STEP A

***185** 次の円の方程式を求めよ。
(1) 中心が原点，半径が5　(2) 中心が点 $(3,\ -2)$，半径が4
(3) 点 $(-2,\ 1)$ を中心とし，点 $(1,\ -3)$ を通る
(4) 2点 $(4,\ -2)$，$(-6,\ 2)$ を直径の両端とする
(5) 点 $(3,\ 4)$ を中心とし，x 軸に接する

186 次の方程式はどのような図形を表すか。
*(1) $x^2+y^2+4x-6y=0$　(2) $3x^2+3y^2-6x+12y+5=0$
*(3) $x^2+y^2-\sqrt{3}x+y+1=0$　(4) $x^2+y^2+6x-2y+15=0$

187 3点 A$(1,\ 1)$，B$(2,\ -1)$，C$(3,\ 2)$ がある。
(1) 3点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ。
(2) △ABC の外心の座標と，外接円の半径を求めよ。

STEP B

188 次の円の方程式を求めよ。
*(1) 円 $x^2+y^2-3x+5y-1=0$ と中心が同じで，点 $(1,\ 2)$ を通る円
*(2) 点 $(1,\ -3)$ に関して，円 $x^2+y^2=1$ と対称な円
(3) 中心が x 軸上にあり，2点 $(3,\ 5)$，$(-3,\ 7)$ を通る円
(4) 中心が直線 $y=x$ 上にあり，半径が $\sqrt{13}$ で点 $(2,\ 1)$ を通る円
*(5) 点 $(1,\ 2)$ を通り，x 軸および y 軸に接する円
(6) 3直線 $x-y=-1$，$x+y=3$，$x+2y=-1$ で作られる三角形の外接円

189 方程式 $x^2+y^2+ax-(a+3)y+\frac{5}{2}a^2=0$ が円を表すとき
(1) 定数 a の値の範囲を求めよ。
(2) この円の半径が最大になるとき，その大きさと定数 a の値を求めよ。

6 円と直線

1 円と直線の位置関係

円と直線の方程式から y を消去して，x の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が得られるとき，その判別式を $D=b^2-4ac$ とする。また，円の中心と直線の距離を d，円の半径を r とする。このとき，次のことが成り立つ。

$D>0 \iff$ 異なる2点で交わる $\iff d<r$
$D=0 \iff$ 接する（共有点は1個）$\iff d=r$
$D<0 \iff$ 共有点をもたない $\iff d>r$

2 円の接線の方程式

1. 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は
$$x_1x+y_1y=r^2$$
2. 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は
$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

STEP A

190 次の円と直線の位置関係（異なる2点で交わる，接する，共有点をもたない）を調べよ。また，共有点があるときは，その座標を求めよ。
*(1) $x^2+y^2=1,\ x-y=1$　(2) $x^2+y^2=3,\ x+y=\sqrt{6}$
*(3) $x^2+y^2=2,\ 2x+3y=6$
(4) $x^2+y^2+2x-4y=0,\ x+2y+2=0$

191 次の円の，円上の点Pにおける接線の方程式を求めよ。
(1) $x^2+y^2=9$，点 P$(1,\ 2\sqrt{2})$　*(2) $x^2+y^2=100$，点 P$(-6,\ 8)$
(3) $x^2+y^2=49$，点 P$(-7,\ 0)$

STEP B

192 円 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=3x+k$ が共有点をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ。また，接するときの k の値と接点の座標を求めよ。

193 次の円と直線の共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。
*(1) $x^2+y^2=1,\ y=-x+k$　(2) $x^2+y^2+4y=0,\ y=kx+2$

194 次の点を通り，与えられた円に接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ。
(1) 点 $(4,\ 2)$，$x^2+y^2=4$　*(2) 点 $(-2,\ 4)$，$x^2+y^2=10$

例題 18 円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 上の点 $(5,\ 7)$ における接線の方程式を求めよ。

指針 接線は，中心と接点を結ぶ直線に垂直であるから，接線の傾きがわかる。

解答 円の中心 $(2,\ 3)$ と点 $(5,\ 7)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{7-3}{5-2}=\frac{4}{3}$$

求める接線は，この直線に垂直で，点 $(5,\ 7)$ を通るから，その方程式は

$$y-7=-\frac{3}{4}(x-5) \qquad すなわち \qquad \boldsymbol{3x+4y=43} \quad 答$$

別解 円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ …… ①

を，中心 $(2,\ 3)$ が原点 $(0,\ 0)$ にくるように平行移動すると

円 $x^2+y^2=25$ …… ②

になる。

この平行移動により，円①上の点 $(5,\ 7)$ は点 $(3,\ 4)$ に移る。

点 $(3,\ 4)$ における円②の接線の方程式は

$3x+4y=25$ …… ③

求める接線は，③を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したもので，その方程式は

$3(x-2)+4(y-3)=25$ すなわち $\boldsymbol{3x+4y=43}$ 答

参考 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

これを用いると $(5-2)(x-2)+(7-3)(y-3)=25$

よって $\boldsymbol{3x+4y=43}$ 答

***195** 円 $x^2+y^2+6x-6y+5=0$ 上の点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

196 次の円の接線の方程式と，その接点の座標を求めよ。

*(1) 円 $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ の接線で，傾きが 2 のもの

(2) 円 $x^2+y^2-6x+8=0$ の接線で，原点を通るもの

197 点 $(-1,\ 7)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する 2 つの直線の接点を A，B とすると，直線 AB の方程式は $-x+7y=25$ であることを示せ。

ヒント

196 ▶ (1) 求める接線の方程式を $y=2x+k$ とおく。これを円の方程式に代入して得られた 2 次方程式の判別式を D とすると，$D=0$ が成り立つ。

197 ▶ 円 $x^2+y^2=25$ の 2 本の接線が，ともに点 $(-1,\ 7)$ を通ると考える。

***198** 次の円の方程式を求めよ。

(1) 点 $(3,\ 0)$ を中心とし，直線 $4x-3y-2=0$ に接する円

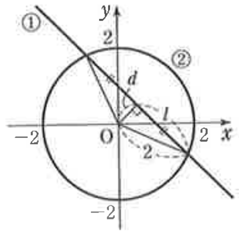
(2) 中心が x 軸の上側にあり，x 軸と直線 $x+y=1$ に接し，半径が 3 である円

(3) 中心が直線 $y=3x$ 上にあり，直線 $2x+y=0$ に接し，点 $(2,\ 1)$ を通る円

例題 19 直線 $x+y=1$ …… ① が円 $x^2+y^2=4$ …… ② によって切り取られる弦の長さと，弦の中点の座標を求めよ。

指針 図形的性質（円の中心から弦に下ろした垂線は，弦を垂直に 2 等分する）を利用する。または，2 次方程式の解と係数の関係を利用する。

解答 円②の中心 $(0,\ 0)$ と直線①の距離を d とすると



$$d=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

円②の半径は 2 であるから，弦の長さを $2l$ とすると

$$l^2=2^2-d^2=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

$l>0$ であるから $\quad l=\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

よって，**弦の長さは** $2l=\sqrt{14}$ 答

また，弦の中点は，円②の中心 $(0,\ 0)$ から直線①に下ろした垂線と，直線①との交点である。

この垂線の方程式は $y=x$ …… ③ ①，③を解くと $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$

よって，**弦の中点の座標は** $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 答

参考 次のように，2 次方程式の解と係数の関係を用いて求めることもできる。

①，②から y を消去して $2x^2-2x-3=0$ …… ④

直線①と円②の交点の座標を $(\alpha,\ 1-\alpha)$，$(\beta,\ 1-\beta)$ とすると，α，β は 2 次方程式④の解であるから，解と係数の関係により $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-\frac{3}{2}$

求める弦の長さを l とすると $l^2=(\beta-\alpha)^2+\{(1-\beta)-(1-\alpha)\}^2=2(\beta-\alpha)^2$

$$=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=2\left\{1^2-4\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}=14$$

$l>0$ であるから，**弦の長さは** $l=\sqrt{14}$ 答

また，**弦の中点の座標は** $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{(1-\alpha)+(1-\beta)}{2}\right)$ すなわち $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 答

199 直線 $4x+3y-5=0$ が次の円によって切り取られる弦の長さと，弦の中点の座標を求めよ。

*(1) $x^2+y^2=4$ (2) $x^2+y^2+4x-2y-1=0$

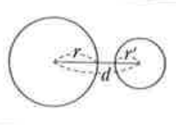
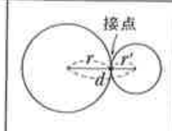
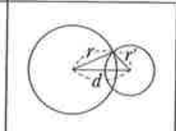
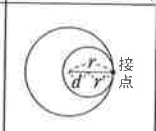
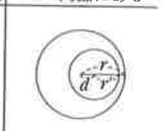
ヒント

198 ▶ (中心と接線の距離)=(半径) を利用する。

7 2つの円

1 2つの円の位置関係

2つの円の半径を r, r' $(r>r')$, 中心間の距離を d とする。

[1] 一方が他方の外部にある	[2] 外接する（1点を共有する）	[3] 2点で交わる	[4] 内接する（1点を共有する）	[5] 一方が他方の内部にある
				
$d>r+r'$	$d=r+r'$	$r-r'<d<r+r'$	$d=r-r'$	$d<r-r'$

注意 [1]~[3] は, $r=r'$ の場合も成り立つ。[4] で $r=r'$ の場合, 2つの円は一致する。

2 2つの円の交点を通る円と直線

2つの円 $x^2+y^2+lx+my+n=0$, $x^2+y^2+l'x+m'y+n'=0$ が2点で交わるとき, 方程式 $k(x^2+y^2+lx+my+n)+(x^2+y^2+l'x+m'y+n')=0$ (k は定数) は

$k\neq-1$ のとき 2つの円の交点を通る円

$k=-1$ のとき 2つの円の交点を通る直線　　を表す。

STEP A

***200** 次の2円の位置関係を調べよ。

(1) $x^2+y^2=9$, $(x-1)^2+(y-2)^2=36$

(2) $(x-3)^2+y^2=4$, $x^2+y^2-2x+4y+4=0$

(3) $x^2+y^2+2x-8y-73=0$, $x^2+y^2+4x-2y-35=0$

201 次の円の方程式を求めよ。

*(1) 中心が点 $(4,\ 4)$ で, 円 $x^2+y^2-2x-3=0$ に外接する円

(2) 中心が点 $(1,\ -2)$ で, 円 $x^2+y^2+6x-2y+6=0$ が内接する円

STEP B

202 次の円の方程式を求めよ。

(1) 中心が点 $(2,\ 2)$ で, 円 $x^2+y^2-2y-19=0$ に接する円

(2) 中心が点 $(-1,\ 7)$ で, 円 $x^2+y^2-8x+10y+16=0$ に接する円

ヒント

202 ▶ 2つの円の接し方が2通りあることに注意する。

203 2つの円 $x^2+y^2=r^2$, $x^2+y^2-6x+4y+4=0$ が異なる2つの共有点をもつように, 定数 r の値の範囲を定めよ。ただし, $r>0$ とする。

204 次の2つの円の共有点の座標を求めよ。

(1) $x^2+y^2=5$, $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

(2) $x^2+y^2-4y-4=0$, $x^2+y^2-2x=0$

***205** 2つの円 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ の2つの交点と点 $(1,\ -1)$ を通る円の中心と半径を求めよ。また, 2つの円の2つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

206 円 $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ と直線 $7x-y+2=0$ の2つの交点と点 $(-1,\ 2)$ を通る円の中心と半径を求めよ。

発展問題

例題 20 円 $x^2+y^2=4$ …… ① と円 $(x-5)^2+y^2=1$ …… ② の共通接線の方程式を求めよ。

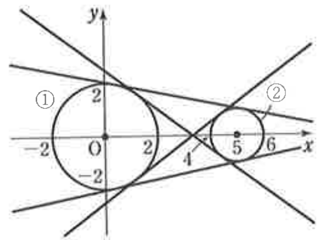
指針 1つの直線が2つの円に接するとき, この直線を2円の **共通接線** という。共通接線を求めるときは, 円①上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線が円②にも接すると考える。

解答 円①上の接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると

$x_1^2+y_1^2=4$ …… ③

接線の方程式は　$x_1x+y_1y=4$ …… ④

直線④が円②に接するとき, 円②の中心 $(5,\ 0)$ と直線④の距離は円②の半径に等しいから



$\dfrac{|5x_1-4|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=1$　　③から　$|5x_1-4|=2$

これを解いて　$x_1=\dfrac{6}{5},\ \dfrac{2}{5}$

③から　$x_1=\dfrac{6}{5}$ のとき $y_1=\pm\dfrac{8}{5}$, $x_1=\dfrac{2}{5}$ のとき $y_1=\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$

よって, 求める接線の方程式は　$\mathbf{3x\pm4y=10,\ x\pm2\sqrt{6}\,y=10}$ 答

207 次の2つの円の共通接線の方程式を求めよ。

(1) $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-6)^2=9$　　(2) $x^2+y^2=9$, $(x-2)^2+y^2=4$

ヒント

203 ▶ 2つの円の半径を r, r', 中心間の距離を d とすると, 求める条件は

$|r-r'|<d<r+r'$

(2) $(x-2y+1)(2x-y-1)$

118. (1) $(x,\ y)=(-2,\ 5),\ (5,\ -2)$

(2) $(x,\ y)=(2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (-2,\ -3),\ (-3,\ -2)$

[(1) $xy=-10$ (2) $x+y=\pm5$]

119. $k=-2$, $(x-2y+1)(x+3y-2)$

[$x^2+(y-1)x-6y^2+7y+k=0$ を x の 2 次方程式とみて解いたとき，根号内は

$25y^2-30y-4k+1$

この式が完全平方式になるためには

$\frac{D}{4}=(-15)^2-25(-4k+1)=0$]

120. (1) -3 (2) 0 (3) 4 (4) 8

121. (1) $a=4$ (2) $a=-2$

122. (1) $x-1,\ x+2$ (2) $x+1,\ x+2,\ x+3$

123. (1) $(x-1)(x+1)(x+3)$

(2) $(x-2)(x+3)^2$ (3) $(x+3)^2(x-6)$

(4) $(x+1)(x+2)(2x+3)$

124. (1) $a=1$ (2) $a=1,\ -\frac{1}{2}$

(3) $a=2,\ b=-1$

125. (1) $(2x+1)(2x^2-x+1)$

(2) $(2x+3)(x^2-2x+3)$

(3) $(3x-1)(x^2+3x+1)$

126. (1) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

(2) $(x+1)(x-2)(x+2)(x+3)$

127. $a=-1,\ b=-1,\ c=1$

128. 順に 2，-7

129. $4x-3$

[$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$ とおくと

$P(2)=5,\ P(3)=9$]

130. $7x-12$

[$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$,

$P(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)-x+4$,

$P(x)=(x-1)(x-3)Q_2(x)+3x$

第 2 式，第 3 式から $P(2)=2,\ P(3)=9$

これと第 1 式から $a,\ b$ を決定する]

131. $x+1$

132. $3-\sqrt{5}\,i$

[$x=1-\sqrt{5}\,i$ から $x-1=-\sqrt{5}\,i$

両辺を 2 乗して整理すると $x^2-2x+6=0$

また $x^4-4x^3+14x^2-19x+26$

$=(x^2-2x+6)(x^2-2x+4)+x+2$]

133. (1) 商 $4x^2+5x+11$，余り 6

(2) 商 $3x^2-7x+14$，余り -25

(3) 商 x^2-2x+1，余り -5

134. x^2+2x-4

[$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+a(x-1)^2+4x-5$,

$P(-2)=-4$]

135. (1) $x=-4,\ 2\pm2\sqrt{3}\,i$

(2) $x=\frac{2}{3},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{3}$ (3) $x=\pm2i,\ \pm3$

(4) $x=\pm2\sqrt{2},\ \pm2\sqrt{2}\,i$ (5) $x=\pm\sqrt{3},\ \pm2$

(6) $x=\pm i,\ \pm2\sqrt{3}\,i$

136. (1) $x=1,\ 2\pm2\sqrt{2}$

(2) $x=-1,\ \frac{3\pm\sqrt{7}\,i}{2}$ (3) $x=1,\ 3,\ -\frac{1}{2}$

(4) $x=\pm2,\ \frac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$ (5) $x=1,\ -1$

(6) $x=2,\ 3,\ -1\pm\sqrt{2}\,i$

137. $a=-4$，$b=6$，他の解は 3

138. (1) $x=\frac{1}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{4}$

(2) $x=-\frac{1}{2},\ 2\pm\sqrt{2}$ (3) $x=\frac{1}{3},\ \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

(4) $x=5,\ \frac{1\pm\sqrt{23}\,i}{2}$ (5) $x=-1,\ 3,\ 1\pm i$

(6) $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

(7) $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$

[(5) $x^2-2x=t$ とおくと，方程式は $t^2-t-6=0$

(6) $(x^4+2x^2+1)-x^2=0$

(7) $x^2-5x=t$ とおくと，方程式は

$(t+1)(t+9)+15=0$]

139. (1) 3 (2) 0 (3) -1

[$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$ を利用]

140. $a=0$，$b=6$，他の解は $\pm\sqrt{2}$

141. $a=7$，$b=13$，他の解は $-1,\ 3-2i$

[方程式に $x=3+2i$ を代入して整理すると

$(3a+b-34)+2(a-7)i=0$

(別解) $3+2i$ が解であるから，$3-2i$ も解。よって，方程式の左辺は $x^2-6x+13$ で割り切れる]

142. $a=4$，$b=-28$，他の解は -8

[他の解を k とすると

$x^3+ax^2+bx+3a+20=(x-2)^2(x-k)$]

143. $a=4,\ -5$

[方程式から $(x-1)(x^2+4x+a)=0$]

144. 2 cm または $(1+\sqrt{3})$ cm

[もとの立方体の 1 辺の長さを x cm とすると

$(x+1)(x+2)(x-1)=\frac{3}{2}x^3$]

145. $3+i,\ -3-i$

[求める複素数を $a+bi$ とすると

$(a+bi)^2=8+6i$]

146. (1) $\frac{2}{7}$ (2) 13 (3) 24 (4) 3 (5) 1

147. (1) 6 (2) 8 (3) 6 (4) 4

148. 左から順に (1) 3，2，内分

(2) 3，5，外分 (3) 5，2，外分

149. (1) $\frac{11}{7}$ (2) 29 (3) -27 (4) 1

150. C，D の順に -1，4

151. -14 [P(5)，Q(-33)]

152. (1) $\sqrt{29}$ (2) $2\sqrt{13}$ (3) 13

153. [AB=CA=5，BC=$5\sqrt{2}$ から

$AB^2+CA^2=BC^2$]

154. (1) $\left(\frac{5}{4},\ -\frac{11}{2}\right)$ (2) $\left(-\frac{6}{5},\ -2\right)$

(3) $\left(\frac{13}{2},\ -13\right)$ (4) $(-18,\ 22)$ (5) $\left(-\frac{1}{2},\ -3\right)$

155. (1) $\left(\frac{2}{3},\ \sqrt{3}\right)$ (2) $\left(-\frac{1}{3},\ 1\right)$

156. (1) $(-7,\ 6)$ (2) $(6,\ 4)$

157. (1) $\left(\frac{5}{16},\ 0\right)$ (2) $(0,\ 8)$

[(1) 求める点の座標を $(x,\ 0)$ とすると

$(x+5)^2+(-2)^2=(x-3)^2+5^2$

(2) 求める点の座標を $(0,\ y)$ とすると

$(-2)^2+(y+3)^2=(-5)^2+(y+2)^2$]

158. $(6,\ -1)$ [C$(x,\ y)$ とすると

$3=\frac{-1+4+x}{3},\ 2=\frac{2+5+y}{3}$]

159. $(2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}),\ (-2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$

160. $(-1,\ 2)$

[求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると

$(x-3)^2+(y-5)^2=(x-2)^2+(y+2)^2$,

$(x-2)^2+(y+2)^2=(x+6)^2+(y-2)^2$

よって $x+7y-13=0,\ 2x-y+4=0$]

161. 対角線の交点 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$，D$(-4,\ -2)$

[D$(x,\ y)$ とすると $\frac{5+x}{2}=\frac{1}{2},\ \frac{4+y}{2}=1$]

162. $(1,\ -4),\ (-3,\ 2),\ (3,\ 0)$

[3 頂点の座標を $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ (x_3,\ y_3)$ として連立方程式を導く]

163. [A$(a,\ b)$，B$(-c,\ 0)$，C$(c,\ 0)$ とすると

G$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3}\right)$ となる。

左辺$=2(a^2+b^2+c^2)$

右辺$=2(a^2+b^2+c^2)$]

164. [A$(x_1,\ y_1)$，B$(-3x_2,\ 0)$，C$(2x_2,\ 0)$ とすると，△ABC の重心の座標は $\left(\frac{x_1-x_2}{3},\ \frac{y_1}{3}\right)$,

また D$\left(\frac{2x_1-9x_2}{5},\ \frac{2y_1}{5}\right)$，E$(0,\ 0)$,

F$\left(\frac{4x_2+3x_1}{5},\ \frac{3y_1}{5}\right)$,

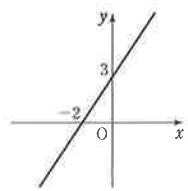
△DEF の重心の

x 座標は $\frac{1}{3}\left(\frac{2x_1-9x_2}{5}+\frac{4x_2+3x_1}{5}\right)=\frac{x_1-x_2}{3}$,

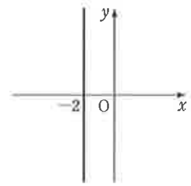
y 座標は $\frac{1}{3}\left(\frac{2y_1}{5}+\frac{3y_1}{5}\right)=\frac{y_1}{3}$]

165. (1)～(3) [図]

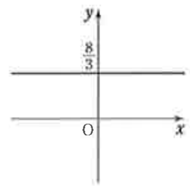
(1)



(2)



(3)



166. (1) $y=2x+7$ (2) $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

(3) $x=4$ (4) $y=2$

167. (1) $y=-\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}$ (2) $y=-x-1$

(3) $x=-2$ (4) $y=5$ (5) $-\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$

168. (1) $t=-3$ (2) $t=0,\ 5$

[(2) 2 点 $(1,\ 4)$，$(-1,\ t)$ を通る直線

$y-4=\frac{t-4}{-1-1}(x-1)$ 上に点 $(t,\ 2)$ があるから

$(t-4)(t-1)=4$]

169. (1) 平行 (2) 垂直 (3) 垂直 (4) 平行

170. 平行な直線，垂直な直線の順に

(1) (ア) $y=3x-14$, $y=-\frac{1}{3}x+6$
(イ) $y=4$, $x=6$ (ウ) $x=6$, $y=4$
(2) $3x-5y+21=0$, $5x+3y+1=0$

171. ただ1組の解をもつ：$a\neq-\frac{9}{2}$；
解をもたない：$a=-\frac{9}{2}$, $c\neq-6$；
無数の解をもつ：$a=-\frac{9}{2}$, $c=-6$
[2直線の関係におき換えて考える。平行でない，平行で異なる，一致する]

172. (1) $(5,\ -3)$ (2) $\left(\frac{3}{13},\ \frac{37}{13}\right)$
[求める点の座標を $(p,\ q)$ とすると
(1) $p+q-2=0$, $p-q-8=0$
(2) $2p+3q-9=0$, $3p-2q+5=0$]

173. 原点，点 $(1,\ 2)$ の順に (1) $\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\frac{\sqrt{10}}{5}$
(2) $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{5}$ (3) 4, 2 (4) 1, 2

174. $y=2x+1$
$\left[\text{直線 AB の傾き } -\frac{1}{2},\ \text{線分 AB の中点 } (1,\ 3)\right]$

175. (1) 3直線の方程式 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{8}$,
$x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{1}{2}x$；交点 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{4}\right)$
(2) 3直線の方程式 $x=3$, $y=\frac{1}{2}x$,
$y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$；交点 $\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$

176. (1) $a=-1$, 2 (2) $a=0$, -3
[(1) $1\cdot(a+2)-a\cdot a=0$ (2) $1\cdot a+a\cdot(a+2)=0$]

177. $a=-\frac{2}{3}$, -2, 2
[3番目の直線について，他の2直線のどちらかと平行であるとき，または，他の2直線の交点 $(-1,\ 1)$ を通るとき]

178. (1) $(-3,\ 4)$ (2) $x-3y+15=0$
[(2) 2直線の交点 $(3,\ 6)$ と点 $(-3,\ 4)$ を通る]

179. $(1,\ 2)$ [$(x+2y-5)k+(2x-3y+4)=0$]

180. $4x-27y+43=0$
[直線 $k(8x+7y-19)+(3x-5y+6)=0$ が
点 $(-4,\ 1)$ を通るとき $k=-\frac{1}{4}$]

181. (1) $5x-6y+8=0$ (2) $6x+5y-27=0$

182. [1番目の直線と2番目の直線の交点 $(2,\ 1)$ を，3番目の直線が通るから $2a+b=1$
2点 $(1,\ -1)$, $(2,\ -3)$ を通る直線の方程式は
$2x+y=1$
よって，点 $(a,\ b)$ はこの直線上にある]

183. (1) 8 (2) 15
[(2) 三角形の頂点の座標は $(-2,\ 1)$, $(1,\ -3)$, $(4,\ 3)$]

184. $\frac{11}{2}$
[点 $P(t,\ t^2+4t+11)$ と直線 AB の距離 d は
$d=\frac{|2t-(t^2+4t+11)-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|t^2+2t+12|}{\sqrt{5}}$
d が最小のとき，△PAB の面積は最小]

185. (1) $x^2+y^2=25$ (2) $(x-3)^2+(y+2)^2=16$
(3) $(x+2)^2+(y-1)^2=25$ (4) $(x+1)^2+y^2=29$
(5) $(x-3)^2+(y-4)^2=16$

186. (1) 中心 $(-2,\ 3)$，半径 $\sqrt{13}$ の円
(2) 中心 $(1,\ -2)$，半径 $\frac{\sqrt{30}}{3}$ の円
(3) 点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$
(4) 方程式が表す図形はない

187. (1) $x^2+y^2-5x-y+4=0$
(2) 外心 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，半径 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

188. (1) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{41}{2}$
(2) $(x-2)^2+(y+6)^2=1$ (3) $(x+2)^2+y^2=50$
(4) $(x+1)^2+(y+1)^2=13$, $(x-4)^2+(y-4)^2=13$
(5) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+(y-5)^2=25$
(6) $x^2+y^2-6x+4y-7=0$
[(1) $x^2+y^2-3x+5y+n=0$ とおいてもよい
(2) 中心 $(2,\ -6)$ (3) $(x-a)^2+y^2=r^2$
(4) $(x-a)^2+(y-a)^2=13$
(5) $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$
(6) 3頂点は $(1,\ 2)$, $(7,\ -4)$, $(-1,\ 0)$]

189. (1) $-\frac{3}{4}<a<\frac{3}{2}$ (2) $\frac{9\sqrt{2}}{8}$, $a=\frac{3}{8}$
[(1) 方程式を変形すると
$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a+3}{2}\right)^2=\frac{-8a^2+6a+9}{4}$
これが円を表すとき $-8a^2+6a+9>0$
(2) 半径は $\frac{\sqrt{-8a^2+6a+9}}{2}$
また $-8a^2+6a+9=-8\left(a-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{81}{8}$]

190. (1) 異なる2点で交わる；$(0,\ -1)$, $(1,\ 0)$
(2) 接する，$\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$
(3) 共有点をもたない (4) 接する，$(-2,\ 0)$

191. (1) $x+2\sqrt{2}y=9$ (2) $-3x+4y=50$
(3) $x=-7$

192. $-5\sqrt{10}\leqq k\leqq5\sqrt{10}$；
$k=5\sqrt{10}$ のとき 接点 $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{2},\ \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$,
$k=-5\sqrt{10}$ のとき 接点 $\left(\frac{3\sqrt{10}}{2},\ -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

193. (1) $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ のとき 2個，
$k=\pm\sqrt{2}$ のとき 1個，
$k<-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<k$ のとき 0個
(2) $k<-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}<k$ のとき 2個，
$k=\pm\sqrt{3}$ のとき 1個，
$-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$ のとき 0個

194. (1) $y=2$, $(0,\ 2)$；
$4x-3y=10$, $\left(\frac{8}{5},\ -\frac{6}{5}\right)$
(2) $-3x+y=10$, $(-3,\ 1)$；
$x+3y=10$, $(1,\ 3)$

195. $2x-3y+2=0$ [円の中心 $(-3,\ 3)$ と点 $(-1,\ 0)$ を通る直線の傾きは $-\frac{3}{2}$]

196. (1) $y=2x+3\sqrt{5}$,
$\left(\frac{-5-6\sqrt{5}}{5},\ \frac{-10+3\sqrt{5}}{5}\right)$；
$y=2x-3\sqrt{5}$, $\left(\frac{-5+6\sqrt{5}}{5},\ \frac{-10-3\sqrt{5}}{5}\right)$
(2) $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x$, $\left(\frac{8}{3},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$；
$y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x$, $\left(\frac{8}{3},\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$
[(1) $y=2x+k$ を円の方程式に代入して
$5x^2+2(2k+5)x+k^2+4k-4=0$, $\frac{D}{4}=0$
(2) $y=mx$ を円の方程式に代入して
$(m^2+1)x^2-6x+8=0$, $\frac{D}{4}=0$]

197. [$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ とする。
接線の方程式は $x_1x+y_1y=25$, $x_2x+y_2y=25$
点 $(-1,\ 7)$ を通ることから
$-x_1+7y_1=25$, $-x_2+7y_2=25$
よって，2点 A, B は直線 $-x+7y=25$ 上にある]

198. (1) $(x-3)^2+y^2=4$
(2) $(x+2-3\sqrt{2})^2+(y-3)^2=9$,
$(x+2+3\sqrt{2})^2+(y-3)^2=9$
(3) $(x-1)^2+(y-3)^2=5$

199. (1) $2\sqrt{3}$, $\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ (2) $2\sqrt{2}$, $\left(-\frac{2}{5},\ \frac{11}{5}\right)$

200. 与えられた2円を順に①，②とする。
(1) 円①は円②の内部にある
(2) 2つの円①，②は2点で交わる
(3) 円②は円①に内接する

201. (1) $(x-4)^2+(y-4)^2=9$
(2) $(x-1)^2+(y+2)^2=49$

202. (1) $(x-2)^2+(y-2)^2=5$,
$(x-2)^2+(y-2)^2=45$
(2) $(x+1)^2+(y-7)^2=64$,
$(x+1)^2+(y-7)^2=324$
[(1) $2\sqrt{5}-r=\sqrt{5}$ または $r-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$
(2) $5+r=13$ または $r-5=13$]

203. $\sqrt{13}-3<r<\sqrt{13}+3$
[$|r-3|<\sqrt{13}<r+3$, $r>0$]

204. (1) $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$
(2) $(2,\ 0)$, $\left(\frac{2}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$
[(1) $y=-x+3$ (2) $x=2y+2$]

205. 中心 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，半径 $\frac{\sqrt{26}}{3}$；$4x+2y-5=0$
[$k(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-4x-2y+1)=0$ で
順に $k=\frac{1}{2}$, $k=-1$ の場合]

206. 中心 $\left(-\frac{9}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$，半径 $\frac{7\sqrt{2}}{2}$
[$k(7x-y+2)+(x^2+y^2+2x+4y-4)=0$ は
円と直線の交点を通る図形を表す]

207. (1) $\pm\sqrt{5}x+2y=3$, $\pm2\sqrt{2}x-y=3$
(2) $x\pm\sqrt{3}y=6$
$\left[(1)\ \frac{|6y_1-1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=3\quad(2)\ \frac{|2x_1-9|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=2\right]$

208. (1) 直線 $4x-3y-6=0$
(2) 原点を中心とし，半径が $2\sqrt{2}$ の円
(3) 中心が点 $\left(-\frac{7}{2},\ 0\right)$，半径が $\frac{3}{2}$ の円

209. (1) 直線 $x-2y=-2$
(2) 中心が点 $(2,\ 0)$，半径が2の円