

# 1 3次式の展開・因数分解と二項定理

## ポイント① 乗法公式(1)

$$[1] (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$[2] (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{例} (1) (x+2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 \\ = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(2) (2x-1)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (2x) \cdot 1^2 - 1^3 \\ = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

### 確認問題 1 次の式を展開せよ.

$$\square(1) (x+3)^3$$

$$\square(2) (x-1)^3$$

$$\square(3) (3x+2)^3$$

$$\square(4) (2x-3)^3$$

$$\square(5) (2x+y)^3$$

$$\square(6) (3x-2y)^3$$

## ポイント② 乗法公式(2)

$$[3] (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

$$[4] (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

$$\text{例} (1) (x+2y)(x^2-2xy+4y^2) = (x)^3 + (2y)^3 = x^3 + 8y^3$$

$$(2) (2x-3)(4x^2+6x+9) = (2x)^3 - 3^3 = 8x^3 - 27$$

### 確認問題 2 次の式を展開せよ.

$$\square(1) (x+3)(x^2-3x+9)$$

$$\square(2) (2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$$

$$\square(3) (4x-3)(16x^2+12x+9)$$

$$\square(4) (5x-y)(25x^2+5xy+y^2)$$

## ポイント③ 因数分解の公式

$$[1] a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$[2] a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\text{例} (1) x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - x \cdot 2 + 2^2) = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$(2) 27x^3 - 8 = (3x)^3 - 2^3 = (3x-2)\{(3x)^2 + (3x) \cdot 2 + 2^2\} = (3x-2)(9x^2 + 6x + 4)$$

### 確認問題 3 次の式を因数分解せよ.

$$\square(1) x^3 + 27$$

$$\square(2) x^3 - 8$$

$$\square(3) 64x^3 + y^3$$

$$\square(4) 27a^3 - b^3$$

$$\square(5) 27x^3 + 8y^3$$

$$\square(6) 125a^3 - 27b^3$$

**ポイント④** パスカルの三角形

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

これらの展開の係数は 1, 2, 1 および 1, 3, 3, 1 となる. このような  $(a+b)^n$  の展開式の係数を順に並べたものをパスカルの三角形という.

パスカルの三角形では,  
ある行の数字は, すぐ上の  
行の隣り合う 2 つの数字の  
和になっている.

$$\begin{array}{ccccccc} n=2 & & & 1 & 2 & 1 & \\ n=3 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ n=4 & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ n=5 & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ n=6 & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

**例** パスカルの三角形から

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

**確認問題 4** パスカルの三角形を利用して, 次の式の展開の計算をせよ.

□(1)  $(x+y)^5$

□(2)  $(a+b)^4$

□(3)  $(x+1)^5$

**ポイント⑤** 二項定理

$(a+b)^n$  の展開は, 組合せの数を用いれば, 次のように書ける.

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_k a^{n-k}b^k + \cdots + {}_nC_{n-1} ab^{n-1} + {}_nC_n b^n$$

**例** (1)  $(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + \cdots + b^{10}$

(2)  $(a+b)^{10}$  の展開式の  $a^3b^7$  の項の係数は,

$${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

**確認問題 5** 次の問に答えよ.

□(1)  $(a+b)^6$  の展開式の  $a^4b^2$  の項の係数を求めよ.

□(2)  $(a+b)^{10}$  の展開式の  $a^9b$  の項の係数を求めよ.

□(3)  $(a+b)^5$  の展開式の  $a^3b^2$  の項の係数を求めよ.

□(4)  $(x+y)^8$  の展開式の  $x^4y^4$  の項の係数を求めよ.

□(5)  $(x+y)^7$  の展開式の  $x^3y^4$  の項の係数を求めよ.

**ポイント⑥** 二項定理を使った展開

- 例** (1)  $(3x - y)^4 = (3x)^4 + 4 \cdot (3x)^3 \cdot (-y) + 6 \cdot (3x)^2 \cdot (-y)^2 + 4 \cdot 3x \cdot (-y)^3 + (-y)^4$   
 $= 81x^4 - 108x^3y + 54x^2y^2 - 12xy^3 + y^4$
- (2)  $(2x + 3y)^5$  の  $x^2y^3$  を含む項は  ${}_5C_3(2x)^2(3y)^3$  だから、この項の係数は  
 ${}_5C_3 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 1080$
- (3)  $(5x - 2y)^6$  の  $xy^5$  を含む項は  ${}_6C_1(5x)(-2y)^5$  だから、この項の係数は  
 ${}_6C_1 \cdot 5 \cdot (-2)^5 = -960$

**確認問題 6** 次の問に答えよ。

(1) 二項定理を用いて次の式を展開せよ。

☐ ①  $(2x + 1)^4$

☐ ②  $(x - 2y)^5$

☐ ③  $(3a + b)^4$

☐ (2)  $(3x + 2y)^9$  の展開式の  $x^2y^7$  を含む項の係数を求めよ。☐ (3)  $(4x - 3y)^8$  の展開式の  $x^3y^5$  を含む項の係数を求めよ。**ポイント⑦** 3 項以上の式の累乗の展開**例題**  $(a + b + c)^6$  の展開式の  $a^2b^2c^2$  の項の係数を求めよ。**解答**  $\{(a + b) + c\}^6 = (a + b)^6 + {}_6C_1(a + b)^5c + {}_6C_2(a + b)^4c^2 + \cdots$ と展開される。 $a^2b^2c^2$  はこのうち  ${}_6C_2(a + b)^4c^2$  に含まれるが、

$$(a + b)^4 = a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + \cdots$$

となるので、求める係数は

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 90$$

**注意** この係数は  $\frac{6!}{2!2!2!}$  と書ける。一般に、 $(a + b + c)^n$  の展開式の  $a^pb^qc^r$  の項の係数は、

$$\frac{n!}{p!q!r!}$$

であることが知られている (ただし、 $p + q + r = n$  とする)。**確認問題 7** 次の問に答えよ。☐ (1)  $(x + y + z)^4$  の展開式の  $x^2yz$  の項の係数を求めよ。☐ (2)  $(a + b + c)^6$  の展開式の  $ab^2c^3$  の項の係数を求めよ。☐ (3)  $(a + b + c)^5$  の展開式の  $a^2b^2c$  の項の係数を求めよ。

---

---

## 練成問題 A

---

---

1 次の式を展開せよ.

(⇒ ポイント1)

□(1)  $(x + 4)^3$

□(2)  $(x - 2)^3$

□(3)  $(2x + 3)^3$

□(4)  $(x - 2y)^3$

2 次の式を展開せよ.

(⇒ ポイント2)

□(1)  $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

□(2)  $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

□(3)  $(4x + y)(16x^2 - 4xy + y^2)$

□(4)  $(5x + 2y)(25x^2 - 10xy + 4y^2)$

3 次の式を展開せよ.

(⇒ ポイント2)

□(1)  $(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6)$

□(2)  $(a - b)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

□(3)  $(x + y)^3 - 3xy(x + y)$

4 次の式を因数分解せよ.

(⇒ ポイント3)

□(1)  $x^3 + 125$

□(2)  $x^3 - 64$

□(3)  $64x^3 + y^3$

□(4)  $64a^3 - b^3$

□(5)  $x^3 - 27$

□(6)  $x^3 - 125$

□(7)  $27a^3 + 64b^3$

□(8)  $8a^3 - 125b^3$

□(9)  $343x^3y^3 + z^3$

8 1 3 次式の展開・因数分解と二項定理

5 パスカルの三角形を利用して、次の式の展開の計算をせよ。

(⇒ ポイント 4)

□(1)  $(a + b)^6$

□(2)  $(x + y)^4$

□(3)  $(a - 1)^6$

6 次の問に答えよ。

(⇒ ポイント 5)

□(1)  $(a + b)^7$  の展開式の  $a^5b^2$  の項の係数を求めよ。

□(2)  $(a + b)^9$  の展開式の  $a^8b$  の項の係数を求めよ。

□(3)  $(a + b)^7$  の展開式の  $a^3b^4$  の項の係数を求めよ。

7 二項定理を用いて、次の式を展開せよ。

(⇒ ポイント 6)

□(1)  $(3x + 1)^4$

□(2)  $(2x - y)^4$

□(3)  $(a + 2b)^5$

8 次の問に答えよ。

(⇒ ポイント 6)

□(1)  $(2x - y)^5$  の展開式の  $x^2y^3$  の項の係数を求めよ。

□(2)  $(2x - 3y)^6$  の展開式の  $x^4y^2$  の項の係数を求めよ。

9 次の問に答えよ。

(⇒ ポイント 7)

□(1)  $(a + b + c)^6$  の展開式の  $a^4bc$  の項の係数を求めよ。

□(2)  $(x + y + z)^7$  の展開式の  $x^3y^2z^2$  の項の係数を求めよ。

□(3)  $(a + b + c)^5$  の展開式の  $ab^3c$  の項の係数を求めよ。

□(4)  $(a + b + c)^7$  の展開式の  $a^4b^2c$  の項の係数を求めよ。

## 練 成 問 題 B

1 次の式を因数分解せよ.

□(1)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

□(2)  $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

2 次の問に答えよ.

□(1)  $(2x + y - z)^4$  の展開式の  $x^2yz$  の項の係数を求めよ.

□(2)  $(3a + 2b + c)^5$  の展開式の  $a^2b^2c$  の項の係数を求めよ.

□(3)  $(x + 2y + 3)^6$  の展開式の  $x^3y^2$  の項の係数を求めよ.

3 □ 次のことを証明せよ.

$(a + b + c)^n$  の展開式の  $a^p b^q c^r$  の項の係数は、 $\frac{n!}{p!q!r!}$  である. ただし、 $p, q, r$  は 0 または正の整数で、 $p + q + r = n$  とする.

4 次の問に答えよ.

□(1)  $(x^2 + x + 1)^5$  の展開式の  $x^5$  の項の係数を求めよ.

□(2)  $(x^2 + x - 1)^6$  の展開式の  $x^3$  の項の係数を求めよ.

□(3)  $\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)^5$  の展開式の  $x^2$  の項の係数を求めよ.

□(4)  $\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^6$  の展開式の定数項を求めよ.

5 次の問に答えよ.

□(1) 二項定理により、 $(x + 1)^n = {}_nC_0 x^n + {}_nC_1 x^{n-1} + \cdots + {}_nC_{n-1} x + {}_nC_n$  である. この両辺に  $x = 1$  を代入することにより、和  ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n$  の値を求めよ.

(2) (1)と同様にして、次の和を求めよ.

□①  ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n$

□②  ${}_n C_0 + {}_n C_2 + {}_n C_4 + \cdots + {}_n C_{2n}$

□③  ${}_n C_1 + {}_n C_3 + {}_n C_5 + \cdots + {}_n C_{2n-1}$

## 2 整式の除法

### ポイント① 整式の割り算

整式の割り算では、各項を降べきの順に整理してから計算する。

例 (1)  $(4x^3 - 5x + 2) \div (2x - 3)$

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 3x + 2 \\
 2x - 3 \overline{) 4x^3 \phantom{- 12x^2} - 5x + 2} \\
 \underline{4x^3 - 6x^2} \phantom{+ 18x} \\
 6x^2 - 5x \phantom{+ 2} \\
 \underline{6x^2 - 9x} \phantom{+ 2} \\
 4x + 2 \\
 \underline{4x - 6} \\
 8
 \end{array}$$

$$\begin{cases} \text{商} & 2x^2 + 3x + 2 \\ \text{余り} & 8 \end{cases}$$

(2)  $(2x^3 - 5x^2 + 3x + 2) \div (x^2 - 2x - 3)$

$$\begin{array}{r}
 2x - 1 \\
 x^2 - 2x - 3 \overline{) 2x^3 - 5x^2 + 3x + 2} \\
 \underline{2x^3 - 4x^2 - 6x} \phantom{+ 2} \\
 -x^2 + 9x + 2 \\
 \underline{-x^2 + 2x + 3} \\
 7x - 1
 \end{array}$$

$$\begin{cases} \text{商} & 2x - 1 \\ \text{余り} & 7x - 1 \end{cases}$$

確認問題 1 次の計算をして、商と余りを求めよ。

□(1)  $(x^2 + 2x - 5) \div (x - 2)$

□(2)  $(3x^2 - 4x + 2) \div (3x - 1)$

□(3)  $(2x^3 + 3x^2 - 20x + 4) \div (x - 3)$

□(4)  $(4x^3 + 2x^2 + 3) \div (x + 2)$

□(5)  $(8x^3 - 4x + 6) \div (2x - 1)$

□(6)  $(x^3 - 4x^2 + 3x + 2) \div (x^2 - 2x - 1)$

□(7)  $(-3x^2 + 2x^3 - 2x + 3) \div (2x + x^2 + 2)$

□(8)  $(2x^3 - 5x + 6x^2 - 7) \div (x^2 + 4x + 6)$

### ポイント② 整式の商と余り(1)

$x$  の整式  $A$  を  $x$  の整式  $B$  で割ったときの商を  $Q$ 、余りを  $R$  とすると、

$$A = BQ + R, \quad (R \text{ の次数}) < (B \text{ の次数})$$

例  $x$  の整式  $A$  を  $x^2 - x - 3$  で割ったときの商が  $x - 2$ 、余りが  $x - 1$  であるとき、

$$\begin{aligned}
 A &= (x^2 - x - 3)(x - 2) + x - 1 \\
 &= x^3 - x^2 - 3x - 2x^2 + 2x + 6 + x - 1 \\
 &= x^3 - 3x^2 + 5
 \end{aligned}$$

確認問題 2 次の問に答えよ。

□(1)  $x$  の整式  $A$  を  $x - 2$  で割ると、商が  $2x - 1$ 、余りが  $3$  である。 $A$  を求めよ。

□(2)  $x$  の整式  $B$  を  $2x^2 - 3x - 1$  で割ると、商が  $3x - 2$ 、余りが  $2x + 4$  である。 $B$  を求めよ。

□(3)  $x$  の整式  $C$  を  $x^2 - 2x + 3$  で割ると、商が  $-x + 4$ 、余りが  $-2x + 5$  である。 $C$  を求めよ。

□(4)  $y$  の整式  $D$  を  $y^2 - 3y - 5$  で割ると、商が  $y - 2$ 、余りが  $-y + 4$  である。 $D$  を求めよ。

**ポイント③ 整式の商と余り(2)**

**例** 整式  $A = x^3 - x^2 + 7x + 1$  を整式  $B$  で割ると、商が  $x + 1$ 、余りが  $7x - 1$  である。

$$x^3 - x^2 + 7x + 1 = B(x + 1) + 7x - 1$$

よって

$$B(x + 1) = x^3 - x^2 + 2$$

右の計算より

$$B = x^2 - 2x + 2$$

$$\begin{array}{r} x+1 \overline{) x^3 - x^2 + 7x + 1} \\ \underline{x^3 + x^2} \phantom{+ 1} \\ -2x^2 + 7x + 1 \\ \underline{-2x^2 - 2x} \phantom{+ 1} \\ 9x + 1 \\ \underline{9x + 9} \\ -8 \end{array}$$

**確認問題 3 次の問に答えよ。**

- (1) 整式  $A = 3x^2 - 4x + 4$  を整式  $B$  で割ると、商が  $x - 1$ 、余りが  $3$  である。 $B$  を求めよ。  
 □(2) 整式  $A = 2x^3 - 3x^2 + 7x$  を整式  $B$  で割ると、商が  $2x - 1$ 、余りが  $3$  である。 $B$  を求めよ。  
 □(3) 整式  $A = x^3 - 3x^2 - 2x + 9$  を整式  $B$  で割ると、商が  $x^2 - 2x - 4$ 、余りが  $5$  である。 $B$  を求めよ。  
 □(4) 整式  $A = 4y^3 - 4y^2 + 6y + 5$  を整式  $B$  で割ると、商が  $2y + 1$ 、余りが  $y + 1$  である。 $B$  を求めよ。

**ポイント④ 複数字の整式の割り算**

文字が2種類以上ある整式についても、1つの文字に着目して割り算を行うことができる。

**例題**  $A = 2x^3 + 5ax^2 - 3a^2x - 25a^3$ ,  $B = x - 2a$  を  $x$  についての整式とみて、 $A$  を  $B$  で割った商と余りを求めよ。

(解答)

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 9ax + 15a^2 \\ x - 2a \overline{) 2x^3 + 5ax^2 - 3a^2x - 25a^3} \\ \underline{2x^3 - 4ax^2} \phantom{- 25a^3} \\ 9ax^2 - 3a^2x \phantom{- 25a^3} \\ \underline{9ax^2 - 18a^2x} \phantom{- 25a^3} \\ 15a^2x - 25a^3 \\ \underline{15a^2x - 30a^3} \\ 5a^3 \end{array}$$

答 商  $2x^2 + 9ax + 15a^2$ 、余り  $5a^3$

**確認問題 4 次のそれぞれについて、 $A$  を  $B$  で割った商と余りを求めよ。ただし割り算は ( ) 内の文字について着目して計算せよ。**

- (1)  $A = 4x^2 - 6bx + 4b^2$ ,  $B = 2x - b$  ( $x$ )  
 □(2)  $A = 6x^3 + 3ax^2 + 6a^2x + 8a^3$ ,  $B = 2x - 3a$  ( $x$ )  
 □(3)  $A = 6x^4 - 5x^3y - 9x^2y^2 + 7xy^3 - 8y^4$ ,  $B = 3x + 2y$  ( $x$ )  
 □(4)  $A = x^4 + 2x^3y - 3x^2y^2 + 5xy^3 + 7y^4$ ,  $B = x^2 - xy + y^2$  ( $x$ )



# 

1 次の計算をして、商と余りを求めよ。

(⇒ ポイント1)

□(1)  $(x^2 - 4x - 20) \div (x + 3)$

□(2)  $(4x^2 - 2x + 7) \div (2x + 1)$

□(3)  $(3x^3 + 2x^2 - 4x - 3) \div (x + 2)$

□(4)  $(5x^3 - 3x^2 + 2) \div (x - 1)$

□(5)  $(9x^3 + 2x + 4) \div (3x - 2)$

□(6)  $(x^3 + 5x^2 - 3x + 4) \div (x^2 + 2x + 4)$

□(7)  $(4x^2 + x^3 + 4 - 5x) \div (3 - 2x + x^2)$

□(8)  $(2x^2 - 3x^3 - 4x - 20) \div (6 - 3x - x^2)$

2 次の問に答えよ。

(⇒ ポイント2)

□(1)  $x$  の整式  $A$  を  $2x + 1$  で割ると、商が  $3x - 2$ 、余りが  $2$  である。 $A$  を求めよ。

□(2)  $x$  の整式  $B$  を  $x^2 - 3x + 1$  で割ると、商が  $x - 2$ 、余りが  $-3x + 5$  である。 $B$  を求めよ。

□(3)  $x$  の整式  $C$  を  $2x^2 - 4x - 1$  で割ると、商が  $-x + 3$ 、余りが  $5x - 1$  である。 $C$  を求めよ。

□(4)  $y$  の整式  $D$  を  $y^2 - 6y + 7$  で割ると、商が  $y + 3$ 、余りが  $5$  である。 $D$  を求めよ。

3 次の問に答えよ。

(⇒ ポイント3)

□(1) 整式  $A = x^3 - 4x^2 + 6x - 15$  を整式  $B$  で割ると、商が  $x - 3$ 、余りが  $-6$  である。 $B$  を求めよ。

□(2) 整式  $A = 6x^2 - x + 3$  を整式  $B$  で割ると、商が  $2x + 1$ 、余りが  $5$  である。 $B$  を求めよ。

□(3) 整式  $A = x^3 + x^2 - 8x + 7$  を整式  $B$  で割ると、商が  $x^2 + 3x - 2$ 、余りが  $3$  である。 $B$  を求めよ。

□(4) 整式  $A = 6y^3 + 5y^2 - 21y + 5$  を整式  $B$  で割ると、商が  $2y^2 + 3y - 5$ 、余りが  $-5$  である。 $B$  を求めよ。

□(5) 整式  $A = 9a^3 - 12a^2 + 10a - 7$  を整式  $B$  で割ると、商が  $3a^2 - 2a + 2$ 、余りが  $-3$  である。 $B$  を求めよ。

□(6) 整式  $A = 2x^3 - 4x^2 + 1$  を整式  $B$  で割ると、商が  $x - 1$ 、余りが  $x - 2$  である。 $B$  を求めよ。

4 次のそれぞれについて、 $A$  を  $B$  で割った商と余りを求めよ。ただし割り算は ( ) 内の文字について着目して計算せよ。

(⇒ ポイント4)

□(1)  $A = 6x^3 - 2ax^2 + 3a^2x + 6a^3$ ,  $B = x - 2a$  ( $x$ )

□(2)  $A = 4x^4 - 2bx^3 - 2b^2x^2 + 7b^3x - 27b^4$ ,  $B = 2x - b$  ( $x$ )

---

---

## 練成問題 B

---

---

### 1 次の問に答えよ.

□(1)  $x$  の整式  $x^3 - 2x^2 + 3x + k$  を  $x - 1$  で割ったときの商と余りを求めよ.

□(2) この(1)の整式が  $x - 1$  で割り切れるときの  $k$  の値を求めよ.

### 2 次の問に答えよ.

□(1)  $x$  の整式  $x^2 + 5x + k$  が  $x + 1$  で割り切れるような  $k$  の値を求めよ.

□(2)  $x$  の整式  $2x^3 - 2x^2 + 3x + k$  が  $x + 1$  で割り切れるような  $k$  の値を求めよ.

□(3)  $x$  の整式  $x^3 - kx^2 + 4x - 4$  が  $x - 2$  で割り切れるような  $k$  の値を求めよ.

### 3 次の問に答えよ.

□(1)  $(a^3 - 2a^2b + 3ab^2 - b^3) \div (a - b)$  において、各式を  $a$  についての整式とみて計算し、その商と余りを求めよ.

□(2)  $(a^3 - 2a^2b + 3ab^2 - b^3) \div (a - b)$  において、各式を  $b$  についての整式とみて計算し、その商と余りを求めよ.

□(3)  $(2x^3 - 3x^2y + 5y^3) \div (x + y)$  において、各式を  $x$  についての整式とみて計算し、その商と余りを求めよ.

□(4)  $(2x^3 - 3x^2y + 5y^3) \div (x + y)$  において、各式を  $y$  についての整式とみて計算し、その商と余りを求めよ.

□(5)  $(5a^3 - 2ab^2 + b^3) \div (a + b)$  において、各式を  $b$  についての整式とみて計算し、その商と余りを求めよ.

□(6)  $(5a^3 - 2ab^2 + b^3) \div (a + b)$  において、各式を  $a$  についての整式とみて計算し、その商と余りを求めよ.

□(7)  $(x^4 - y^4) \div (x + y)$  において、各式を  $y$  についての整式とみて計算し、その商と余りを求めよ.

□(8)  $(x^4 - y^4) \div (x + y)$  において、各式を  $x$  についての整式とみて計算し、その商と余りを求めよ.

# 3 分数式とその計算

## ポイント① 約分

$A$  を整式,  $B$  を1次以上の整式としたとき,  $\frac{A}{B}$  の形のものを分数式という. 整式と分数式を合わせて有理式という.

分数式では, 数の場合と同様, 分母・分子に0以外の同じ式をかけても, 分母・分子を0以外の共通な因数で割ってもよい.

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times C}{B \times C} \quad \frac{A}{B} = \frac{A \div D}{B \div D}$$

これ以上約分できないとき, 分数式は既約であるという.

**例題** 次の分数式を約分せよ.

$$(1) \frac{8x^2y}{6xy^2}$$

$$(2) \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(解答) (1) \text{ 与式} = \frac{4x}{3y}$$

$$(2) \text{ 与式} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+3}{x-1}$$

**確認問題 1** 次の分数式を約分せよ.

$$\square(1) \frac{14abx}{12ax^2}$$

$$\square(2) \frac{18x^2y^3}{12x^4y^2}$$

$$\square(3) \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\square(4) \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}$$

## ポイント② 乗法・除法

分数式の乗法・除法は, 数の分数の場合と同じように計算する.

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD} \quad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

$$(例) \frac{2y}{x^2} \times \frac{1}{y} = \frac{2}{x^2} \quad \frac{by^2}{a^2x} \div \frac{b^2y}{ax^2} = \frac{by^2}{a^2x} \times \frac{ax^2}{b^2y} = \frac{xy}{ab}$$

**例題** 次の式を計算せよ.

$$(1) (x-1) \times \frac{x+3}{x^2+x-2}$$

$$(2) \frac{x^2-x-2}{x^2+2x-3} \div \frac{x^2-1}{x^2+5x+6}$$

$$(解答) (1) \text{ 与式} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

$$(2) \text{ 与式} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-1)} \div \frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x+2)} = \frac{(x+1)(x-2)(x+3)(x+2)}{(x+3)(x-1)(x+1)(x-1)} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2}$$

**確認問題 2** 次の式を計算せよ.

$$\square(1) \frac{x}{y^2} \times \frac{y}{x}$$

$$\square(2) \frac{y^3}{2x^2} \times \frac{x^3}{3y}$$

$$\square(3) \frac{y^2}{x^2} \div \frac{y^3}{x}$$

$$\square(4) \frac{yz^2}{3x} \div \frac{xz}{4y}$$

$$\square(5) (x+2) \times \frac{x-2}{x^2-x-6}$$

$$\square(6) \frac{x-1}{x+2} \times \frac{x^2-x-6}{x^2+3x-4}$$

$$\square(7) \frac{x^2+x-2}{x^2-2x-3} \times \frac{x^2+5x+4}{x^2+5x+6}$$

$$\square(8) (x+2) \div \frac{x^2+x-2}{x+3}$$

$$\square(9) \frac{x+3}{x+2} \div \frac{x^2+2x-3}{x^2+3x+2}$$

$$\square(10) \frac{x^2-x-2}{x^2+5x+6} \div \frac{x+1}{x^2+2x-3}$$

**ポイント③ 通分と加法・減法**

数の分数と同じように、いくつかの分数式を分母の同じ分数式にすることを通分という。

例  $\frac{3}{x-1}$ ,  $\frac{4}{x+2}$  を通分すると,

$$\frac{3}{x-1} = \frac{3}{x-1} \times \frac{x+2}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)}, \quad \frac{4}{x+2} = \frac{4}{x+2} \times \frac{x-1}{x-1} = \frac{4(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

より  $\frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)}$ ,  $\frac{4(x-1)}{(x-1)(x+2)}$  となる。

分母が同じ分数式の加法や減法は、次のように計算する。

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C} \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$$

例  $\frac{3x-1}{x-1} + \frac{2x+5}{x-1} = \frac{(3x-1)+(2x+5)}{x-1} = \frac{5x+4}{x-1}$

$$\frac{2x-3}{x+2} - \frac{4x-3}{x+2} = \frac{(2x-3)-(4x-3)}{x+2} = -\frac{2x}{x+2}$$

例題 次の式を計算せよ。

(1)  $\frac{x-1}{x} + \frac{3x-4}{2x}$

(2)  $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-2}$

(3)  $\frac{x-3}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2+2x-3}$

(4)  $\frac{1 - \frac{x+y}{x-y}}{1 + \frac{x+y}{x-y}}$

(解答) (1) 与式 =  $\frac{2(x-1)}{2x} + \frac{3x-4}{2x} = \frac{2(x-1)+3x-4}{2x} = \frac{5x-6}{2x}$

(2) 与式 =  $\frac{3(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{3(x-2)+2(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{5x-4}{(x+1)(x-2)}$

(3) 与式 =  $\frac{x-3}{(x-1)(x+1)} - \frac{x-1}{(x+3)(x-1)}$   
 $= \frac{(x-3)(x+3)-(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{x^2-9-x^2+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}$   
 $= -\frac{8}{(x-1)(x+1)(x+3)}$

(4) 与式 =  $\frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)+(x+y)} = \frac{-2y}{2x} = -\frac{y}{x}$

確認問題 3 次の式を計算せよ。

□(1)  $\frac{2x-3}{x+2} + \frac{3x+5}{x+2}$

□(2)  $\frac{4x+2}{x-3} - \frac{5x-6}{x-3}$

□(3)  $\frac{2x+1}{x} + \frac{x-5}{3x}$

□(4)  $\frac{3x-7}{2x} - \frac{2x+3}{3x}$

□(5)  $\frac{4}{x-3} + \frac{5}{x+3}$

□(6)  $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+4}$

□(7)  $\frac{2x+3}{x-2} + \frac{4x-3}{x+1}$

□(8)  $\frac{x+3}{x+5} - \frac{4x-5}{x-2}$

□(9)  $\frac{x-3}{x^2+x-2} + \frac{2x-3}{x^2+2x-3}$

□(10)  $\frac{3x+4}{x^2-x-6} - \frac{3x+2}{x^2-2x-3}$

□(11)  $\frac{1 - \frac{1}{2x+1}}{1 + \frac{1}{2x+1}}$

□(12)  $\frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}}$

□(13)  $\frac{x - \frac{1}{x+1}}{x + \frac{1}{x+1}}$

□(14)  $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$

□(15)  $1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$

# 

1 次の分数式を約分せよ。

(⇒ ポイント1)

□(1)  $\frac{24xy^2}{18ax}$

□(2)  $\frac{22abx}{33bx^3}$

□(3)  $\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 6x + 8}$

□(4)  $\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + x - 6}$

2 次の式を計算せよ。

(⇒ ポイント2)

□(1)  $\frac{y^3}{x} \times \frac{x^2}{y}$

□(2)  $\frac{4x^3}{y^2} \times \frac{z^2}{2xy}$

□(3)  $\frac{x^3}{y^2} \div \frac{x^2}{y}$

□(4)  $\frac{y^2 z}{2x^2} \div \frac{yz^2}{4x^5}$

3 次の式を計算せよ。

(⇒ ポイント2)

□(1)  $(x - 3) \times \frac{x + 5}{x^2 - 2x - 3}$

□(2)  $\frac{x - 8}{x - 3} \times \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 56}$

□(3)  $\frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 + 6x - 7} \times \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 14x + 48}$

□(4)  $(x - 5) \div \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 3}$

□(5)  $\frac{x - 2}{x - 7} \div \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 49}$

□(6)  $\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 4x - 12} \div \frac{x^2 + 8x + 12}{x^2 - 7x + 10}$

4 次の式を計算せよ。

(⇒ ポイント3)

□(1)  $\frac{3x + 4}{x - 5} + \frac{2x - 7}{x - 5}$

□(2)  $\frac{3x - 2}{x + 2} - \frac{2x + 5}{x + 2}$

□(3)  $\frac{3x + 1}{2x} + \frac{x - 5}{x}$

□(4)  $\frac{2x + 5}{3x} - \frac{3x + 5}{4x}$

□(5)  $\frac{3}{x + 2} + \frac{4}{x - 3}$

□(6)  $\frac{3}{x + 4} - \frac{4}{x - 3}$

□(7)  $\frac{3x - 1}{x + 2} + \frac{2x + 3}{x - 4}$

□(8)  $\frac{2x - 5}{x - 3} - \frac{3x - 5}{x + 2}$

□(9)  $\frac{2x + 3}{x^2 + x - 6} + \frac{x - 5}{x^2 + 3x - 10}$

□(10)  $\frac{2x - 5}{x^2 - 4x - 5} - \frac{3x + 7}{x^2 - 6x + 5}$

□(11)  $\frac{x - \frac{1}{2x + 1}}{x + \frac{1}{2x + 1}}$

□(12)  $\frac{1 - \frac{1}{3x - 1}}{1 - \frac{1}{2x - 1}}$

□(13)  $\frac{1 + \frac{1}{2x + 3y}}{1 - \frac{1}{2x + 3y}}$

□(14)  $\frac{2}{2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}}$

# --- --- 練成問題 B --- ---

7 次の式を計算せよ.

$$\square(1) \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{x(x-2)} - \frac{3}{(x-2)(x+2)}$$

$$\square(2) \quad \left(x - \frac{3}{x+2}\right) \left(x - 2 + \frac{4}{x+3}\right)$$

$$\square(3) \quad \frac{x+1}{x^2-3x+2} + \frac{x-1}{x^2+x-6} - \frac{2x-1}{x^2+2x-3}$$

$$\square(4) \quad \frac{2x+1}{x^2-2x-3} - \frac{3x-1}{x^2+3x+2} + \frac{x+4}{x^2-x-6}$$

$$\square(5) \quad \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)}$$

$$\square(6) \quad \frac{1}{(x-1)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-7)}$$

$$\square(7) \quad \frac{x-1}{x-2} - \frac{2x+3}{x+1} + \frac{2x-1}{x-1} - \frac{x+3}{x+2}$$

$$\square(8) \quad \frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{3x^2+8x-2}{x+3} - \frac{2x^2-3x+2}{x-1} - \frac{2x^2-5x-2}{x-3}$$

$$\square(9) \quad \frac{ca}{(a-b)(b-c)} + \frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)}$$

$$\square(10) \quad \frac{b^3}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^3}{(b-c)(c-a)} + \frac{a^3}{(c-a)(a-b)}$$