第1章　式と証明

第1節　式と計算

1　3次式の展開と因数分解

1　3次式の展開の公式

1　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

2　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$,　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

2　3次式の因数分解の公式

3　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

STEP A

1　公式1を用いて，次の式を展開せよ。

*(1)　$(a+3)^3$　(2)　$(2x-1)^3$　(3)　$(4x+y)^3$

*(4)　$(-5a+2b)^3$　*(5)　$(ab-2)^3$　(6)　$(2x^2+3y)^3$

2　公式2を用いて，次の式を展開せよ。

*(1)　$(x+4)(x^2-4x+16)$　(2)　$(1-a)(1+a+a^2)$

(3)　$(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$　*(4)　$(5x-2y)(25x^2+10xy+4y^2)$

3　次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+1)^3(2x-1)^3$　*(2)　$(a+2b)^2(a^2-2ab+4b^2)^2$

(3)　$(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

4　公式3を用いて，次の式を因数分解せよ。

*(1)　$8x^3+27$　*(2)　a^3-125b^3　(3)　$128x^3+2y^3$　(4)　$a^3b^3-c^3$

5　次の式を因数分解せよ。

*(1)　$64x^6-1$　*(2)　$a^6+26a^3b^3-27b^6$　(3)　$(x-y)^3+8$

STEP B

6　$(a+b+c)^3$ を展開せよ。

7　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3-3x^2+6x-8　*(2)　$8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$

ヒント

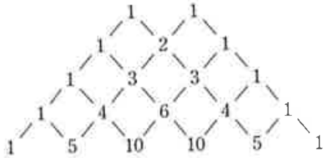
7 ▶ (2)　展開の公式1を利用する。

2 二項定理

1 パスカルの三角形

1　数の配列は左右対称で，各行の両端の数は1である。

2　両端以外の各数は，その左上の数と右上の数の和に等しい。



2 二項定理

1. **二項定理**　$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$
$\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n$
2. **$(a+b)^n$ の展開式の一般項**　${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$
3. ${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$ の係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を **二項係数** という。
4. 二項係数の関係式の証明に，$(a+b)^n$ の展開式を利用することがある。

STEP A

8　次の式の展開式を求めよ。

*(1)　$(x+2)^4$　　(2)　$(a-b)^4$　　*(3)　$(1-a)^5$

9　次の式の展開式を求めよ。

(1)　$(a-b)^7$　　(2)　$(2x+1)^5$　　*(3)　$(x-3)^6$

*(4)　$(3x+2y)^5$　　(5)　$\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^6$　　*(6)　$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^7$

10　次の式の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(3x+1)^5$　$[x^4]$　　*(2)　$(3x-2)^5$　$[x^3]$

(3)　$(2-x)^{10}$　$[x^7]$　　*(4)　$(2x-3y)^7$　$[x^5y^2]$

11　二項定理の等式を用いて，次の等式を導け。

(1)　${}_n\mathrm{C}_0+2{}_n\mathrm{C}_1+2^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+2^n{}_n\mathrm{C}_n=3^n$

*(2)　${}_n\mathrm{C}_0-\dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

STEP B

12　次の式の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(2x^2-1)^6$　$[x^6]$　　*(2)　$(2x^3-3x)^5$　$[x^9]$

13　次の式の展開式における，[　]内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(a+b+c)^6$　　$[ab^2c^3]$　　　*(2)　$(x+y-3z)^8$　　$[x^5yz^2]$

14　二項定理を用いて，次のことを証明せよ。ただし，n は2以上の整数とする。

(1)　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>2$

(2)　$x>0$ のとき　$(1+x)^n \geqq 1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$

例題 1　$\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$ の展開式における x^3 の項の係数を求めよ。

指針　一般項の式 ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$ において，$a=2x^2$，$b=-\dfrac{1}{x}$，$n=6$ とおく。

解答　展開式の一般項は　${}_6\mathrm{C}_r(2x^2)^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r\cdot 2^{6-r}(x^2)^{6-r}(-1)^r\left(\dfrac{1}{x}\right)^r$

$={}_6\mathrm{C}_r\cdot 2^{6-r}(-1)^r\dfrac{x^{12-2r}}{x^r}$

$\dfrac{x^{12-2r}}{x^r}=x^3$ とすると　$x^{12-2r}=x^3x^r$　　よって　$x^{12-2r}=x^{3+r}$

両辺の x の指数を比較して　$12-2r=3+r$　　ゆえに　$r=3$

したがって，x^3 の項の係数は　${}_6\mathrm{C}_3\cdot 2^{6-3}(-1)^3=20\cdot 8\cdot(-1)=\mathbf{-160}$　答

15　次の式の展開式における，[　]内のものを求めよ。

(1)　$\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^7$　　[x^2 の項の係数]　　(2)　$\left(2x^3-\dfrac{1}{3x^2}\right)^5$　　[定数項]

発展問題

16　11^{11} を100で割ったときの余りを求めよ。

17　等式 $(1+x)^n(x+1)^n=(1+x)^{2n}$ を用いて，次の等式を証明せよ。

$${}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n{}^2={}_{2n}\mathrm{C}_n$$

18　(1)　$k{}_n\mathrm{C}_k=n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　(1)を用いて，等式 ${}_n\mathrm{C}_1+2{}_n\mathrm{C}_2+3{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n{}_n\mathrm{C}_n=n\cdot 2^{n-1}$ を証明せよ。

ヒント

16 ▶ $11^{11}=(10+1)^{11}$

17 ▶ $(1+x)^n(x+1)^n=(1+x)^{2n}$ において，x^n の項の係数を比較する。

研究　$(a+b+c)^n$ の展開式

1　$(a+b+c)^n$ の展開式

$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ の項の係数は $\dfrac{n!}{p!q!r!}$　ただし　$p+q+r=n$

※　$\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$ を $(a+b+c)^n$ の展開式の一般項という。

STEP B

例題 2　$(x+y-2z)^7$ の展開式における $x^3y^2z^2$ の項の係数を求めよ。

指針　$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項の式 $\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$ を利用する。

解答　$x^3y^2z^2$ の項は　$\dfrac{7!}{3!2!2!}x^3y^2(-2z)^2$

よって，その係数は　$\dfrac{7!}{3!2!2!}\cdot(-2)^2=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot2}\cdot4=840$　答

19　次の式の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(x+y+z)^6$　$[x^2yz^3]$　　*(2)　$(x+2y+3z)^6$　$[x^3y^2z]$

(3)　$(2x+3y-z)^7$　$[x^2y^2z^3]$　　(4)　$(x+y-3z)^8$　$[x^5z^3]$

発展問題

例題 3　$(x^2+2x-1)^6$ の展開式における x^4 の項の係数を求めよ。

指針　一般項の式 $\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$ において，$a=x^2$，$b=2x$，$c=-1$，$n=6$ とおく。

解答　展開式の一般項は

$$\frac{6!}{p!q!r!}(x^2)^p(2x)^q(-1)^r=\frac{6!}{p!q!r!}\cdot2^q(-1)^rx^{2p+q}$$

ただし　$p+q+r=6$，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

x^4 の項は $2p+q=4$ のときで，$p\geqq0$，$q\geqq0$ であるから

$p=0,\ 1,\ 2$

よって，$2p+q=4$ と $p+q+r=6$ を満たす負でない整数 p，q，r の組は

$(p,\ q,\ r)=(0,\ 4,\ 2),\ (1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 0,\ 4)$

したがって，求める係数は

$$\frac{6!}{0!4!2!}\cdot2^4(-1)^2+\frac{6!}{1!2!3!}\cdot2^2(-1)^3+\frac{6!}{2!0!4!}\cdot2^0(-1)^4=15$$　答

20　次の式の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(x^2-x+2)^4$　$[x^5]$　　(2)　$(1+2x-x^2)^{10}$　$[x^3]$

3 整式の割り算

1 整式の割り算

1. 1つの文字について，降べきの順に整理してから，割り算を行う。
2. **割り算の等式** AとBが同じ1つの文字についての整式で，$B \neq 0$ とするとき，
$$A=BQ+R,\quad R\text{は}0\text{か，}B\text{より次数の低い整式}$$
を満たす整式QとRがただ1通りに定まる。
整式Qを，AをBで割ったときの **商**，Rを **余り** という。

STEP A

21 次の整式A，Bについて，AをBで割った商と余りを求めよ。

*(1) $A=a^2+7a+10$，$B=a+2$　(2) $A=x^2-3x-5$，$B=2x-2$

(3) $A=x^3+5x-6$，$B=x-1$　(4) $A=4x^3-3x-9$，$B=2x-3$

*(5) $A=1-2a+6a^2+4a^3$，$B=1+2a$

(6) $A=a^3+2a-3$，$B=a^2+2a-1$

***22** 次の整式A，Bについて，AをBで割った商と余りを求めよ。また，その結果を $A=BQ+R$ の形に書け。

(1) $A=2x^2-3x+1$，$B=x+1$　(2) $A=2x^3-5x^2+4x-1$，$B=x^2-x+1$

23 *(1) x^2-2x-1 で割ると，商が $2x-3$，余りが $-2x$ である整式を求めよ。

(2) x^2+x+1 で割ると，商が $x-3$，余りが $2x-1$ である整式を求めよ。

24 次のような整式Bを，それぞれ求めよ。

*(1) x^3-x^2+3x+1 をBで割ると，商が $x+1$，余りが $3x-1$

(2) $6x^4+7x^3-9x^2-x+2$ をBで割ると，商が $2x^2+x-3$，余りが $6x-1$

*(3) x^4-6x^2+2x+8 をBで割ると，商がBと一致し，余りが $2x-1$

STEP B

25 次の式A，Bをxについての整式とみて，AをBで割った商と余りを求めよ。

(1) $A=2x^3+7ax^2+5a^2x+6a^3$，　$B=x+3a$

*(2) $A=x^3-3ax^2+2a^3$，　$B=x^2-2ax-2a^2$

*(3) $A=2x^3-6bx^2+8b^3$，　$B=x-b$

(4) $A=x^4+x^2y^2+y^4$，　$B=x^2+xy+y^2$

4 分数式とその計算

1 分数式

A，B を整式とするとき，$\dfrac{A}{B}$ の形に表される式を **分数式** という。

2 基本性質と四則計算

1. **基本性質**　$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{A}{B}$　(ただし，$C\neq 0$)
2. **乗法，除法**　$\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$，　$\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$
3. **加法，減法**　$\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}=\dfrac{A+B}{C}$，　$\dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}=\dfrac{A-B}{C}$

STEP A

26　次の分数式を約分して簡単にせよ。

*(1) $\dfrac{15a^2b^2}{40a^3b}$　(2) $\dfrac{4a^3+8ab^2}{5a^2}$　*(3) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$

(4) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}$　*(5) $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+b)^2-c^2}$　(6) $\dfrac{a^3-a^2b+ab^2}{a^3+b^3}$

27　次の式を計算せよ。

*(1) $\dfrac{(7a^2b)^2}{21x^3y^3}\times\dfrac{3x^2y}{35(ab^2)^2}$　(2) $\dfrac{3axy^3}{5b^2}\div\dfrac{6ay^3}{10b^2x}$

*(3) $\dfrac{a^2-11a+24}{a^2-6a-16}\times\dfrac{a^2+2a}{a^2-6a+9}$　(4) $\dfrac{x^2-8x-20}{3x^2+5x-2}\times\dfrac{3x^2-31x+10}{x^3-2x^2-80x}$

*(5) $\dfrac{a^2+3a+2}{a^2-5a+6}\div\dfrac{a^2+4a+3}{a^2+a-12}$　(6) $\dfrac{x^2-9}{x+2}\div(x^2-x-6)$

(7) $\dfrac{6x^2-7x-20}{x^2-4}\times\dfrac{x^2-x-2}{6x^2-15x}\div\dfrac{3x^2+7x+4}{x^2+2x}$

28　次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x^2+4}{x-2}-\dfrac{4x}{x-2}$　*(2) $\dfrac{3}{x(3-x)}+\dfrac{x}{3(x-3)}$

(3) $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}$　*(4) $\dfrac{3x-4}{x^2-3x+2}-\dfrac{3x+2}{x^2-4}$

(5) $\dfrac{2x-1}{x^2-x-6}-\dfrac{2x+1}{x^2+x-12}$　*(6) $\dfrac{x-2}{2x^2-5x+3}+\dfrac{3x-1}{2x^2+x-6}+\dfrac{2x-5}{x^2+x-2}$

29 次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{x-1+\dfrac{2}{x+2}}{x+1-\dfrac{2}{x+2}}$ *(2) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$

STEP B

30 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{2}{1+a}+\dfrac{4}{1+a^2}+\dfrac{2}{1-a}+\dfrac{8}{1+a^4}$

(2) $\dfrac{ca}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{ab}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{bc}{(c-a)(a-b)}$

例題 4 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x-5}{x-4}$

(2) $\dfrac{1}{(x-1)x}+\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

指針 (1) (分子の次数)≧(分母の次数) の分数式は $\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{(x+1)+1}{x+1}=1+\dfrac{1}{x+1}$ のように，分子の次数を低くする。

(2) 前から順に加えてもよいが，各項を2つの分数式の差に変形する方法もある。

解答 (1) 与式$=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)-\left(1-\dfrac{1}{x-3}\right)+\left(1-\dfrac{1}{x-4}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}\right)$

$=\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}=-\dfrac{\boldsymbol{4(2x-3)}}{\boldsymbol{x(x+1)(x-3)(x-4)}}$ 答

(2) 与式$=\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right)+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{(x-1)(x+2)}}$ 答

***31** 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x+3}{x+1}-\dfrac{x-5}{x-3}+\dfrac{x-6}{x-4}$

(2) $\dfrac{2}{(a-1)(a+1)}+\dfrac{2}{(a+1)(a+3)}+\dfrac{2}{(a+3)(a+5)}$

***32** $x+\dfrac{1}{x}=4$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$，$x^3+\dfrac{1}{x^3}$ の値を求めよ。

答 と 略 解

原則として，問題の要求している答の数値・図などをあげ，[ ]には略解やヒントを付した。

1. (1) $a^3+9a^2+27a+27$
(2) $8x^3-12x^2+6x-1$
(3) $64x^3+48x^2y+12xy^2+y^3$
(4) $-125a^3+150a^2b-60ab^2+8b^3$
(5) $a^3b^3-6a^2b^2+12ab-8$
(6) $8x^6+36x^4y+54x^2y^2+27y^3$

2. (1) x^3+64 (2) $1-a^3$ (3) $8a^3+27b^3$
(4) $125x^3-8y^3$

3. (1) $64x^6-48x^4+12x^2-1$
(2) $a^6+16a^3b^3+64b^6$ (3) x^6-1
[(3) $(x-1)(x^2+x+1)\times(x+1)(x^2-x+1)$]

4. (1) $(2x+3)(4x^2-6x+9)$
(2) $(a-5b)(a^2+5ab+25b^2)$
(3) $2(4x+y)(16x^2-4xy+y^2)$
(4) $(ab-c)(a^2b^2+abc+c^2)$

5. (1) $(2x+1)(2x-1)(4x^2-2x+1)(4x^2+2x+1)$
(2) $(a-b)(a+3b)(a^2+ab+b^2)(a^2-3ab+9b^2)$
(3) $(x-y+2)(x^2-2xy+y^2-2x+2y+4)$

6. $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2$
$+3c^2a+3ca^2+6abc$
[$\{(a+b)+c\}^3$]

7. (1) $(x-2)(x^2-x+4)$ (2) $(2a-3b)^3$
[(1) $x^3-8-(3x^2-6x)$]

8. (1) $x^4+8x^3+24x^2+32x+16$
(2) $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$
(3) $1-5a+10a^2-10a^3+5a^4-a^5$

9. (1) $a^7-7a^6b+21a^5b^2-35a^4b^3+35a^3b^4$
$-21a^2b^5+7ab^6-b^7$
(2) $32x^5+80x^4+80x^3+40x^2+10x+1$
(3) $x^6-18x^5+135x^4-540x^3+1215x^2-1458x$
$+729$
(4) $243x^5+810x^4y+1080x^3y^2+720x^2y^3$
$+240xy^4+32y^5$
(5) $x^6+2x^5+\dfrac{5}{3}x^4+\dfrac{20}{27}x^3+\dfrac{5}{27}x^2+\dfrac{2}{81}x+\dfrac{1}{729}$
(6) $x^7-7x^5+21x^3-35x+\dfrac{35}{x}-\dfrac{21}{x^3}+\dfrac{7}{x^5}-\dfrac{1}{x^7}$

10. (1) 405 (2) 1080 (3) -960 (4) 6048

11. [$(1+x)^n$ の展開式に
(1) $x=2$ (2) $x=-\dfrac{1}{2}$ を代入する]

12. (1) -160 (2) -1080

13. (1) 60 (2) 1512

14. [$(a+b)^n$ の展開式で
(1) $a=1,\ b=\dfrac{1}{n}$ (2) $a=1,\ b=x$ とする]

15. (1) 35 (2) $-\dfrac{40}{27}$
[(1) ${}_7C_r(x^2)^{7-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_7C_r\dfrac{x^{14-2r}}{x^r}$
$\dfrac{x^{14-2r}}{x^r}=x^2$ とすると $x^{14-2r}=x^{2+r}$
(2) ${}_5C_r(2x^3)^{5-r}\left(-\dfrac{1}{3x^2}\right)^r={}_5C_r\cdot2^{5-r}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^r\dfrac{x^{15-3r}}{x^{2r}}$
これが定数項のとき $\dfrac{x^{15-3r}}{x^{2r}}=1$]

16. 11
[$11^{11}=(10+1)^{11}$
$={}_{11}C_0\cdot10^{11}+{}_{11}C_1\cdot10^{10}\cdot1+{}_{11}C_2\cdot10^9\cdot1^2+\cdots$
$+{}_{11}C_9\cdot10^2\cdot1^9+{}_{11}C_{10}\cdot10\cdot1^{10}+{}_{11}C_{11}\cdot1^{11}$
$=10^2({}_{11}C_0\cdot10^9+{}_{11}C_1\cdot10^8+{}_{11}C_2\cdot10^7+\cdots+{}_{11}C_9)$
$+110+1$]

17. [$(1+x)^n(x+1)^n$ の展開式において，x^n の係数は ${}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+\cdots\cdots+{}_nC_n{}^2$]

18. [(1) $k{}_nC_k=k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
$=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!}=n{}_{n-1}C_{k-1}$
(2) 左辺$=n+n{}_{n-1}C_1+n{}_{n-1}C_2+\cdots+n{}_{n-1}C_{n-1}$
$=n(1+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1})$
$=n(1+1)^{n-1}$]

19. (1) 60 (2) 720 (3) -7560 (4) -1512
[(1) $\dfrac{6!}{2!1!3!}$ (2) $\dfrac{6!}{3!2!1!}\cdot2^2\cdot3^1$
(3) $\dfrac{7!}{2!2!3!}\cdot2^2\cdot3^2(-1)^3$ (4) $\dfrac{8!}{5!3!}(-3)^3$]

20. (1) -28 (2) 780
[(1) $\dfrac{4!}{1!3!0!}(-1)^3\cdot2^0+\dfrac{4!}{2!1!1!}(-1)^1\cdot2^1$
(2) $\dfrac{10!}{7!3!0!}\cdot2^3(-1)^0+\dfrac{10!}{8!1!1!}\cdot2^1(-1)^1$]

21. (1) 商 $a+5$，余り 0
(2) 商 $\dfrac{1}{2}x-1$，余り -7

(3) 商 x^2+x+6，余り 0

(4) 商 $2x^2+3x+3$，余り 0

(5) 商 $2a^2+2a-2$，余り 3

(6) 商 $a-2$，余り $7a-5$

22. (1) 商 $2x-5$，余り 6；
$2x^2-3x+1=(x+1)(2x-5)+6$

(2) 商 $2x-3$，余り $-x+2$；
$2x^3-5x^2+4x-1=(x^2-x+1)(2x-3)-x+2$

23. (1) $2x^3-7x^2+2x+3$ (2) x^3-2x^2-4

24. (1) x^2-2x+2 (2) $3x^2+2x-1$

(3) x^2-3，$-x^2+3$

25. (1) 商 $2x^2+ax+2a^2$，余り 0

(2) 商 $x-a$，余り 0

(3) 商 $2x^2-4bx-4b^2$，余り $4b^3$

(4) 商 x^2-xy+y^2，余り 0

26. (1) $\dfrac{3b}{8a}$ (2) $\dfrac{4a^2+8b^2}{5a}$ (3) $\dfrac{x-2}{x-3}$

(4) $\dfrac{x-3}{x-2}$ (5) $\dfrac{a-b+c}{a+b+c}$ (6) $\dfrac{a}{a+b}$

27. (1) $\dfrac{a^2}{5b^2xy^2}$ (2) x^2 (3) $\dfrac{a}{a-3}$ (4) $\dfrac{x-10}{x(x+8)}$

(5) $\dfrac{(a+2)(a+4)}{(a-2)(a+3)}$ (6) $\dfrac{x+3}{(x+2)^2}$ (7) $\dfrac{1}{3}$

28. (1) $x-2$ (2) $\dfrac{x+3}{3x}$ (3) $\dfrac{2}{x(x-2)}$

(4) $\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$ (5) $\dfrac{2}{(x+2)(x+4)}$ (6) $\dfrac{4}{x+2}$

[(4) $\dfrac{(3x-4)(x+2)-(3x+2)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x+2)}$

(6) 分母を $(x+2)(x-1)(2x-3)$ とすると分子は $4(x-1)(2x-3)$]

29. (1) $\dfrac{x+1}{x+3}$ (2) $\dfrac{1}{x}$

30. (1) $\dfrac{16}{1-a^8}$ (2) -1

[(1) まず第 1 項と第 3 項を計算する]

31. (1) $-\dfrac{8(2x-3)}{x(x+1)(x-3)(x-4)}$

(2) $\dfrac{6}{(a-1)(a+5)}$

32. 順に 14，52

$\left[x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2,\right.$

$\left.x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

33. (1)，(2)，(5)

34. (1) $a=2$，$b=-2$

(2) $a=2$，$b=-3$，$c=-6$

(3) $a=9$，$b=4$，$c=-12$

(4) $a=3$，$b=-9$，$c=7$，$d=-2$

(5) $a=3$，$b=8$，$c=3$，$d=2$

35. (1) $a=-2$，$b=2$

(2) $a=1$，$b=-2$

(3) $a=1$，$b=-1$，$c=-2$

36. (1) $a=-11$，$b=2$ (2) $a=2$，$b=3$

37. (1) $l=3$，$m=4$ (2) $l=3$，$m=-4$

38. $2x^3+x^2+4x+4$

[求める 3 次式を P とおくと，条件から
$P=(x^2+1)(ax+b)+2x+3$，
$P=(x^2+x+1)(cx+d)+3x+5$
この 2 式の同じ次数の項の係数を比較する]

39. $x=-1$，$y=-2$

[$(x-2y-3)k+(x-3y-5)=0$]

40. (1) $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$ (2) $a=\dfrac{1}{4}$，$b=-\dfrac{1}{4}$

(3) $a=2$，$b=-3$，$c=-2$

41. $a=-1$，$b=1$，$c=2$

[y を消去すると $(a+b)x^2+(-2b+c)x+b=1$]

42. [(1) 右辺を展開 (2)，(3) 両辺展開]

43. [$c=-(a+b)$ として c を消去。または
$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$ を代入

(3) 左辺$=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc$
と変形すると簡単]

44. [条件式$=k$ とおいて (1) $a=bk$，$c=dk$ を代入 (2) $x=ak$，$y=bk$，$z=ck$ を代入]

45. (1) $a=\dfrac{10}{3}$，$b=5$，$c=\dfrac{20}{3}$

(2) $a=-2$，$b=-6$，$c=-8$

46. (1) $\dfrac{9}{8}$ (2) $-\dfrac{10}{29}$

47. $\left[左辺=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}\right)+\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{a}\right)+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}\right)\right.$

$\left.=\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}\right]$

48. [$y+z=(b-c)k$，$z+x=(c-a)k$，
$x+y=(a-b)k$ 辺々を加える]

49. [$a=xk$，$b=yk$，$c=zk$ とおいて，左辺と右辺のそれぞれに代入]

50. [$z=-(x+y)$ を第 2 式に代入。
$2x^2+2y^2-(x+y)^2=(x-y)^2$]