14　不等式の証明

ポイント1　不等式の性質

1)　不等式の両辺に同じ数を足したり引いたりしてもよい.

$$a > b \implies a + c > b + c,\ a - c > b - c$$

2)　不等式の両辺に同じ正の数を掛けたり，同じ正の数で割ったりしてもよい.

$$c > 0,\ a > b \implies ac < bc,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

3)　不等式の両辺に同じ負の数を掛けたり，同じ負の数で割ったりすると，不等号の向きが逆になる.

$$c < 0,\ a > b \implies ac < bc,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

例題　**$x > y$ のとき，$2x + y > x + 2y$ を証明せよ.**

(証明) $(2x + y) - (x + 2y) = x - y$

$x - y > 0$ より

　$2x + y > x + 2y$

確認問題 1　次の不等式を証明せよ.

□(1)　$x > y$ のとき，$3x + 2y > 2x + 3y$

□(2)　$x > y > 0$ のとき，$x^2 - 4y > y^2 - 4x$

ポイント2　不等式の証明(1)：2乗数の性質を用いる

a が正，負，0 のどんな実数であっても $a^2 \geqq 0$. 特に $a^2 = 0$ のとき $a = 0$.

例題　**不等式 $x^2 + y^2 \geqq 2xy$ を証明せよ.**

(証明) $x^2 + y^2 - 2xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geqq 0$

よって　$x^2 + y^2 \geqq 2xy$

また，等号が成り立つのは，$x = y$ のとき.

確認問題 2　次の不等式を証明せよ.

□(1)　$5(x^2 + y^2) \geqq (x - 2y)^2$

□(2)　$13(x^2 + y^2) \geqq (3x + 2y)^2$

ポイント3　不等式の証明(2)：積の利用

例題　**$a > 1$，$b > 1$ のとき，$ab + 1 > a + b$ であることを証明せよ.**

(証明) $ab + 1 - (a + b) = (a - 1)(b - 1) > 0$

よって　$ab + 1 > a + b$

確認問題 3□　**$a > 2$，$b > 2$ のとき，$ab + 4 > 2a + 2b$ であることを証明せよ.**

ポイント4 不等式の証明(3)：2乗数の性質を用いる

例題 不等式 $\boldsymbol{a^2+b^2 \geqq ab}$ を証明せよ.

(証明) $a^2+b^2-ab=a^2-ab+b^2=\left\{a^2-2\cdot a\cdot\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2$

$$=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0 \quad \left(\because \left(a-\frac{b}{2}\right)^2 \geqq 0,\ \frac{3}{4}b^2 \geqq 0\right)$$

ゆえに $a^2+b^2 \geqq ab$

また，等号が成り立つのは，$a-\frac{b}{2}=b=0$，すなわち $a=b=0$ のとき.

確認問題 4 次の不等式を証明せよ.

□(1) $a^2+ab+b^2 \geqq 0$

□(2) $x^2+10>6x$

□(3) $6x^2+y^2 \geqq 4xy$

□(4) $4x^2-12xy+12y^2 \geqq 0$

ポイント5 相加平均・相乗平均の関係

1) 2つの数 a，b について，$\frac{a+b}{2}$ を a，b の相加平均という.

2) 2つの正の数 a，b について，$\sqrt{ab}$ を a，b の相乗平均という.

3) **(相加平均・相乗平均の関係)**

$\boldsymbol{a>0,\ b>0}$ **のとき** $\boldsymbol{\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}}$ 　**等号が成り立つのは** $\boldsymbol{a=b}$ **のとき**

(証明) $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a-2\sqrt{ab}+b)=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\}$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$$

ゆえに $\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

また等号が成り立つのは $\sqrt{a}=\sqrt{b}$，すなわち $a=b$ のとき.

注意 相加平均・相乗平均の関係は $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ の形でもよく用いる.

例題 $\boldsymbol{x>0}$ **のとき，** $\boldsymbol{x+\frac{1}{x} \geqq 2}$ **を証明せよ.**

(証明) 2つの正の数 x，$\frac{1}{x}$ について相加平均・相乗平均の関係を使うと，

$$x+\frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$$

ゆえに $x+\frac{1}{x} \geqq 2$

また等号が成り立つのは $x=\frac{1}{x}$ のとき，すなわち $x^2=1$ より $x>0$ を考えて $x=1$ のとき.

確認問題 5　次の不等式を証明せよ．ただし，文字はすべて正の数を表すものとする．

□(1)　$a+\dfrac{2}{a} \geqq 2\sqrt{2}$

□(2)　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$

□(3)　$\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right)\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{d}\right) \geqq 4$

□(4)　$\left(\dfrac{2b}{a}+\dfrac{3d}{c}\right)\left(\dfrac{3c}{b}+\dfrac{2a}{d}\right) \geqq 24$

ポイント6　不等式の証明(4)：2乗して証明する

$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき　$a \geqq b \iff a^2 \geqq b^2$

例題　$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq \sqrt{a+b}$$

(証明)　$\sqrt{a}+\sqrt{b}$，$\sqrt{a+b}$ ともに正または0であるから，それぞれを2乗したものを比較すればよい．

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2 &= a+2\sqrt{ab}+b-(a+b)\\ &= 2\sqrt{ab} \geqq 0\end{aligned}$$

ゆえに　$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq \sqrt{a+b}$

また等号が成り立つのは $a=0$ または $b=0$ のとき．

確認問題 6　次の不等式を証明せよ．

□(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{a}+2\sqrt{b} > \sqrt{a+4b}$

□(2)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，$x+y \geqq \sqrt{x^2+y^2}$

ポイント7　絶対値の不等式

例題　不等式 $|a|+|b| \geqq |a+b|$ を証明せよ．

(証明)　$|a|+|b|$，$|a+b|$ ともに負でないから，それぞれを2乗して考えてよい．

$$\begin{aligned}(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2 &= |a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2\\ &= a^2+2|a||b|+b^2-(a^2+2ab+b^2)\\ &= 2(|a||b|-ab) \geqq 0\end{aligned}$$

よって　$(|a|+|b|)^2 \geqq (|a+b|)^2$

ゆえに　$|a|+|b| \geqq |a+b|$

また，等号が成り立つのは $|a||b|=ab$ のとき，すなわち a，b が同符号のときか，一方が0のとき．

確認問題 7　次の不等式を証明せよ．

□(1)　$|a|+|b| \geqq |a-b|$　　　□(2)　$|a+b| \geqq |a|-|b|$

練成問題　A

1　次の不等式を証明せよ．　(⇨ ポイント 1)

□(1)　$x > y$ のとき，$3x + y > 3y + x$

□(2)　$x > y > 0$ のとき，$x^2 - 6y > y^2 - 6x$

2　次の不等式を証明せよ．　(⇨ ポイント 2)

□(1)　$10(x^2 + y^2) \geqq (x - 3y)^2$　　□(2)　$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geqq (ac + bd)^2$

3　次の問に答えよ．　(⇨ ポイント 3)

□(1)　x，y が正の整数のとき，$6xy + 1 > 2x + 3y$ を証明せよ．

□(2)　x，y がいずれも 2 より大きい実数のとき，$xy > x + y$ になることを証明せよ．

4　次の不等式を証明せよ．　(⇨ ポイント 4)

□(1)　$a^2 + 2b^2 \geqq 2ab$　　□(2)　$x^2 + 5 > 4x$　　□(3)　$12x^2 + y^2 \geqq 6xy$

5　次の不等式を証明せよ．ただし，文字はすべて正の数を表すものとする．　(⇨ ポイント 5)

□(1)　$2x + \dfrac{4}{x} \geqq 4\sqrt{2}$　　□(2)　$\left(a + \dfrac{1}{b}\right)\left(b + \dfrac{1}{a}\right) \geqq 4$

6　次の不等式を証明せよ．　(⇨ ポイント 6)

□(1)　$a > 0$，$b > 0$ のとき，$2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} > \sqrt{4a + 9b}$

□(2)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，$x + 2y \geqq \sqrt{x^2 + 4y^2}$

7　次の不等式を証明せよ．　(⇨ ポイント 7)

□(1)　$|a| + 2|b| \geqq |a - 2b|$　　□(2)　$|a| + |b| + |c| \geqq |a + b + c|$

練成問題　B

1　a, b, c, d を正の数とするとき，次の不等式を証明せよ．

□(1)　$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

□(2)　$a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$

2□　不等式 $35(x^2+y^2+z^2) \geqq (x+5y+3z)^2$ を証明せよ．

3□　a, b, c, x, y, z を0でない実数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

4□　a, b を正の数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqq \frac{2}{a+b}$$

5　a, b, c, d を正の数とするとき，次の不等式を証明せよ．

□(1)　$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

□(2)　$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$

□(3)　$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$

6　次の不等式を証明せよ．ただし文字はすべて正の数を表すものとする．

□(1)　$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right) > 8$

□(2)　$\left(9a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) > 12$

7□　$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{ab} \geqq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

8□　不等式 $a^2+1>|a|$ を証明せよ．

9□　$a+b \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$|a| \leqq a+2b$$

10□　3つの正の数 x，y，z について，次の不等式を証明せよ．

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqq 8xyz$$

11　$|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$ のとき，次の不等式を証明せよ．

□(1)　$ab+1>a+b$

□(2)　$abc+2>a+b+c$

12□　$a>b>0$，$c>0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}<1$$

13□　$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ と $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ の大小を比較せよ．ただし $n \geqq 1$ とする．

14□　a，b が実数で $a>b>0$ のとき，$\sqrt{a-b}$ と $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ の大小を比較せよ．

15□　$a>b>0$ のとき a，$\frac{a+2b}{3}$，b を大きい順に不等号で表せ．

16□　$0<p \leqq a \leqq b \leqq q$ とするとき，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ と $\frac{q}{p}+\frac{p}{q}$ の大小を比較せよ．

14　不等式の証明〔P 62～P 67〕

◇確認問題〔P 62～P 64〕

1 (1)　左辺－右辺 $= x - y > 0$

(2)　左辺－右辺 $= (x^2 - y^2) + 4(x - y)$

$= (x + y + 4)(x - y) > 0$

2 (1)　左辺－右辺 $= 4x^2 + 4xy + y^2 = (2x + y)^2 \geqq 0$

等号は $2x = -y$ のとき．

(2)　左辺－右辺 $= 4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2 \geqq 0$

等号は $2x = 3y$ のとき．

3　左辺－右辺 $= ab - 2(a + b) + 4 = (a - 2)(b - 2) > 0$

4 (1)　$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geqq 0$

等号は $a = b = 0$ のとき．

(2)　$x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 > 0$

(3)　$6x^2 - 4xy + y^2 = 6\left(x - \frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{1}{3}y^2 \geqq 0$

等号は $x = y = 0$ のとき．

(4)　$4x^2 - 12xy + 12y^2 = (2x - 3y)^2 + 3y^2 \geqq 0$

等号は $x = y = 0$ のとき．

5 (1)　$a + \frac{2}{a} \geqq 2\sqrt{a \cdot \frac{2}{a}} = 2\sqrt{2}$

等号は $a = \sqrt{2}$ のとき．

(2)　$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$，$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ を辺々かけると，

$(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqq 4$

等号は $a = b$ のとき．

(3)　$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} \geqq 2\sqrt{\frac{bd}{ac}}$，$\frac{c}{b} + \frac{a}{d} \geqq 2\sqrt{\frac{ca}{bd}}$ を辺々かけると，

$\left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right)\left(\frac{c}{b} + \frac{a}{d}\right) \geqq 4$

等号は $bc = ad$，$ab = cd$ のとき（$a = c$，$b = d$ のとき）．

(4)　$\frac{2b}{a} + \frac{3d}{c} \geqq 2\sqrt{\frac{6bd}{ac}}$，$\frac{3c}{b} + \frac{2a}{d} \geqq 2\sqrt{\frac{6ca}{bd}}$ を辺々かけると，$\left(\frac{2b}{a} + \frac{3d}{c}\right)\left(\frac{3c}{b} + \frac{2a}{d}\right) \geqq 24$

等号は $2bc = 3ad$，$3cd = 2ab$ のとき（$a = c$，$2b = 3d$ のとき）．

6 (1)　$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a + 4b})^2 = 4\sqrt{ab} > 0$

(2)　$(x + y)^2 - (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 2xy \geqq 0$

等号は $x = 0$ または $y = 0$ のとき．

7 (1)　$(|a| + |b|)^2 - (|a - b|)^2 = 2(|ab| + ab) \geqq 0$

等号は a，b が異符号のときか，一方が 0 のとき．

(2)　左辺－右辺 $= |a + b| - (|a| - |b|)$

$= |a + b| + |b| - |a|$

$|a + b| + |b| \geqq 0$，$|a| \geqq 0$ だからこれらを 2 乗して比べると

$(|a + b| + |b|)^2 - (|a|)^2 = 2|a + b||b| + 2ab + 2b^2$

$= 2\{|a + b||b| + (a + b)b\} \geqq 0$

等号は $a + b$ と b が異符号のときか，$(a + b)b = 0$ のとき．

◇練成問題A〔P 65〕

1 (1)　左辺－右辺 $= 2(x - y) > 0$

(2)　左辺－右辺 $= (x + y + 6)(x - y) > 0$

2 (1)　左辺－右辺 $= 9x^2 + 6xy + y^2 = (3x + y)^2 \geqq 0$

等号は $3x = -y$ のとき．

(2)　左辺－右辺 $= a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = (ad - bc)^2 \geqq 0$

等号は $ad - bc = 0$ のとき．

3 (1)　左辺－右辺 $= 6xy - 2x - 3y + 1 = (2x - 1)(3y - 1) > 0$

(2)　左辺－右辺 $= xy - x - y = (x - 1)(y - 1) - 1 > 0$

4 (1)　左辺－右辺 $= (a - b)^2 + b^2 \geqq 0$

等号は $a = b = 0$

(2)　左辺－右辺 $= (x - 2)^2 + 1 > 0$

(3)　左辺－右辺 $= 12\left(x - \frac{y}{4}\right)^2 + \frac{y^2}{4} \geqq 0$

等号は $x = y = 0$

5 (1)　相加平均・相乗平均の関係より

$2x + \frac{4}{x} \geqq 2\sqrt{2x \cdot \frac{4}{x}} = 4\sqrt{2}$

等号は $x = \sqrt{2}$ のとき．

(2)　相加平均・相乗平均の関係より

$a + \frac{1}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$，$b + \frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}}$

これらを辺々かけて $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geqq 4$

等号は $ab = 1$ のとき．

6 (1)　$(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b})^2 - (\sqrt{4a + 9b})^2 = 12\sqrt{ab} > 0$

(2)　$(x + 2y)^2 - (\sqrt{x^2 + 4y^2})^2 = 4xy \geqq 0$

等号は $x = 0$ または $y = 0$ のとき．

7 (1)　$(|a| + 2|b|)^2 - (|a - 2b|)^2 = 4(|ab| + ab) \geqq 0$

等号は a，b が異符号のときか，一方が 0 のとき．

(2)　$(|a| + |b| + |c|)^2 - (|a + b + c|)^2$

$= 2(|ab| - ab) + 2(|bc| - bc) + 2(|ca| - ca) \geqq 0$

等号は a，b，c が同符号のとき（0 のものがある場合を含む）．

◇練成問題B〔P 66～P 67〕

1 (1)　左辺－右辺$=\frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}(b - c)^2 + \frac{1}{2}(c - a)^2 \geqq 0$

等号は $a = b = c$ のとき．

(2)　3(左辺－右辺) $= 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqq 0$

等号は $a = b = c$ のとき．

2　左辺－右辺 $= 34x^2 + 10y^2 + 26z^2 - 10xy - 30yz - 6zx$

$= (5x - y)^2 + (3y - 5z)^2 + (z - 3x)^2 \geqq 0$

等号は $x = y = z = 0$ または $x : y : z = 1 : 5 : 3$ のとき．

3　左辺－右辺 $= (bx - ay)^2 + (cx - az)^2 + (cy - bz)^2 \geqq 0$

等号は $a : b : c = x : y : z$ のとき．

4　左辺－右辺 $= \dfrac{(a - b)^2}{2ab(a + b)} \geqq 0$

等号は $a = b$ のとき．

5 (1)　2(左辺－右辺) $= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$

等号は $a = b$ のとき．

(2)　3(左辺－右辺) $= (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})$

$\times (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{ca})$

$= (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})$

$\times \left\{\frac{1}{2}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 + \frac{1}{2}(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c})^2 + \frac{1}{2}(\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a})^2\right\} \geqq 0$

等号は $a = b = c$ のとき．

(3) (1)より　$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$, $c+d \geqq 2\sqrt{cd}$ だから

$$a+b+c+d \geqq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd} \geqq 2\sqrt{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{cd}} = 4\sqrt[4]{abcd}$$

等号は $a=b=c=d$ のとき.

6 (1)　相加平均・相乗平均の関係より

$$a+\frac{1}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}},\ b+\frac{4}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{4b}{a}} = 4\sqrt{\frac{b}{a}}$$

よって両辺をかけ合わせて

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right) > 8$$

ただし，等号はそれぞれ $a=\frac{1}{b}$, $b=\frac{4}{a}$ のとき成り立つので，同時には成り立たない.

［別解］

$$左辺 = ab+\frac{4}{ab}+5 \geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+5 = 9 > 8$$

(2)　相加平均・相乗平均の関係より

$$9a+\frac{1}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{9a}{b}} = 6\sqrt{\frac{a}{b}},\ b+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

よって両辺をかけ合わせて

$$\left(9a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) > 12$$

(1)と同様，等号は同時には成り立たない.

［別解］

$$左辺 = 9ab+\frac{1}{ab}+10 \geqq 2\sqrt{\frac{9ab}{ab}}+10 = 16 > 12$$

7　相加平均・相乗平均の関係より

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$$

両辺に $\sqrt{ab}$ をかけて　$(a+b)\sqrt{ab} \geqq 2ab$

$a+b$ で割って　$\sqrt{ab} \geqq \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

等号は $a=b$ のとき.

8　$左辺-右辺 = \left(|a|-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$

9　$a \geqq 0$ のとき　$a+2b-|a| = 2b \geqq 0$

$a<0$ のとき　$a+2b-|a| = 2(a+b) \geqq 0$

10　相加平均・相乗平均の関係により

$$x+y \geqq 2\sqrt{xy},\ y+z \geqq 2\sqrt{yz},\ z+x \geqq 2\sqrt{zx}$$

それぞれ辺々かけて

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqq 8xyz$$

等号は $x=y=z$ のとき.

11 (1)　$左辺-右辺 = ab-(a+b)+1 = (a-1)(b-1) > 0$

(2)　$左辺 = \{(ab)c+1\}+1 > ab+c+1$
$= (ab+1)+c > a+b+c$

12　$1-\dfrac{b+c}{a+c} = \dfrac{a-b}{a+c} > 0$

$\dfrac{b+c}{a+c}-\dfrac{b}{a} = \dfrac{c(a-b)}{a(a+c)} > 0$

13　$(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
$= 2\sqrt{n}-(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})$

ここで　$(2\sqrt{n})^2-(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})^2 = 2(n-\sqrt{n^2-1})$

さらに　$n^2-(\sqrt{n^2-1})^2 = 1 > 0$

よって　$n-\sqrt{n^2-1} > 0$

さらに　$2\sqrt{n}-(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}) > 0$

よって　$\sqrt{n}-\sqrt{n-1} > \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

14　$(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 2\sqrt{ab}-2b$
$= 2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) > 0$

よって　$\sqrt{a-b} > \sqrt{a}-\sqrt{b}$

15　$a-\dfrac{a+2b}{3} = \dfrac{2}{3}(a-b) > 0$

$\dfrac{a+2b}{3}-b = \dfrac{1}{3}(a-b) > 0$ より　$a > \dfrac{a+2b}{3} > b$

16　$\left(\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}\right)-\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{(aq-bp)(bq-ap)}{abpq}$
$= \left(\dfrac{q}{p}-\dfrac{b}{a}\right)\left(1-\dfrac{ap}{bq}\right) \geqq 0$

よって $\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q} \geqq \dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$　(等号は　$a=b$, $p=q$ のとき)