６月１４日実施　数学演習講座　確認テスト

多項式の計算・恒等式・等式の証明

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿　得点　＿＿＿／５０

1 次の式を計算せよ。（各６点）

(1) $\dfrac{2}{(a-1)(a+1)}+\dfrac{2}{(a+1)(a+3)}+\dfrac{2}{(a+3)(a+5)}$　(2) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$

(1) ＿＿＿＿＿＿＿＿　(2) ＿＿＿＿＿＿＿＿

2 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。（各６点）

(1) $2x^2-7x-1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

a= ＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) $ax^3-7x^2-18x-b=(x+1)(x-4)(cx+d)$

a=　　　b ＿＿＿＿＿＿＿＿

(3) $\dfrac{x+1}{(x-1)(3x-1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{3x-1}$

a= ＿＿＿＿＿＿＿＿

3 次の等式を証明せよ。

(1) $a^4+b^4=\dfrac{1}{2}\{(a^2+b^2)^2+(a-b)^2(a+b)^2\}$（６点）

(2) $a+b+c=0$ のとき，$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc=0$（７点）

(3) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき　$\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{x}{a}$（７点）

6月14日実施　数学演習講座　確認テスト

多項式の計算・恒等式・等式の証明

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿　得点＿＿＿＿／50

1 次の式を計算せよ。（各6点）

(1) $\dfrac{2}{(a-1)(a+1)}+\dfrac{2}{(a+1)(a+3)}+\dfrac{2}{(a+3)(a+5)}$

$=\left(\frac{1}{a-1}-\cancel{\frac{1}{a+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{a+1}}-\cancel{\frac{1}{a+3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{a+3}}-\frac{1}{a+5}\right)=\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+5}$

$=\dfrac{(a+5)-(a-1)}{(a-1)(a+5)}$

$=\dfrac{6}{(a-1)(a+5)}$

(1) $\dfrac{6}{(a-1)(a+5)}$

(2) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$ ×(1−x)

$=1-\dfrac{1-x}{1-x-1}=1+\dfrac{1-x}{x}$

$=\dfrac{x+1-x}{x}$

$=\dfrac{1}{x}$

(2) $\dfrac{1}{x}$

2 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。（各6点）

(1) $2x^2-7x-1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$=ax^2+(-2a+b)x+(a-b+c)$

係数を比較して $a=2,\ -2a+b=-7,\ a-b+c=-1$ これを解く

a= 2　b= −3　c= −6

(2) $ax^3-7x^2-18x-b=(x+1)(x-4)(cx+d)$

$x=-1$を代入すると $-a-7+18-b=0$ ∴ $a+b=11$

$x=4$を代入すると $64a-112-72-b=0$ ∴ $64a-b=184$

これを解いて $a=3$, $b=8$

5式は $3x^3-7x^2-18x-8=(x^2-3x-4)(cx+d)$

$=cx^3+(d-3c)x^2+(-3d-4c)x-4d$

係数を比較して $c=3,\ d=2$

a= 3　b= 8　c= 3　d= 2

(3) $\dfrac{x+1}{(x-1)(3x-1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{3x-1}$　両辺に$(x-1)(3x-1)$をかける

$x+1=a(3x-1)+b(x-1)$　係数を比較して

$x+1=(3a+b)x+(-a-b)$　$\begin{cases}3a+b=1\\-a-b=1\end{cases}$ より $a=1$, $b=-2$

a= 1　b= −2

3 次の等式を証明せよ。

(1) $a^4+b^4=\dfrac{1}{2}\{(a^2+b^2)^2+(a-b)^2(a+b)^2\}$（6点）

右辺 $=\frac{1}{2}\{(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(a^4+2a^2b^2+b^4)+(a^4-2a^2b^2+b^4)\}$

$=\frac{1}{2}(2a^4+2b^4)$

$=a^4+b^4$

= 左辺　よって等式は示された。

(2) $a+b+c=0$ のとき，$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc=0$（7点）

左辺 $=a^2(-a)+b^2(-b)+c^2(-c)+3abc$

$=-a^3-b^3-c^3+3abc$

$=-(a^3+b^3+c^3)+3abc$

ここで $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0$ より

$a^3+b^3+c^3=3abc$ である

従って 左辺

$=-(3abc)+3abc=0$ で等式は示された。

※ $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
は，因数分解の公式として覚えたい。

(3) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき $\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{x}{a}$（7点）

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ とすると

$x=ak$

$y=bk$ と表せる。

$z=ck$

よって

左辺

$=\dfrac{k(a+b+c)}{a+b+c}$

$=k$

右辺 $=\dfrac{ak}{a}$

$=k$

よって 左辺=右辺で

等式は示された。

〔$a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解〕

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ であることを利用して $a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解することができる。

$\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc}=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

←$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$を適用。

$=\{(a+b)^3+c^3\}-\{3ab(a+b)+3abc\}$

←A^3+B^3 とみる。$3ab$ は共通因数。

$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab\{(a+b)+c\}$

←$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ca-bc+c^2)-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ca-bc+c^2-3ab)$

←$(a+b+c)$ でくくる。

$=\boldsymbol{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$