高校数学演習　恒等式・等式の証明

19 基本例題　**未定係数法 [1]**　基本｜標準｜発展

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1) $2x^2-7x-2=a(x-1)^2+b(x+1)+c$

(2) $6x+12=a(x+1)(x-1)+b(x-1)(x-2)+c(x-2)(x+1)$

20 標準例題　**未定係数法 [2]**　基本｜標準｜発展

(1) 等式 $\dfrac{1}{x^3-x}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(2) 等式 $2x^2+axy+by+c=(x-1)(2x+3y-c)$ が，x，y についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

類題 19-1　次の等式が恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1) $2x^2-3=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

(2) $a(x+1)(x-1)+bx(x+1)+cx(x-1)=5(x-6)$

類題 19-2　3 次式 x^3-3x^2+ax+b が 2 次式 x^2-x+1 で割り切れるように，定数 a，b の値を定めよ。

類題 20-1　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1) $\dfrac{5x+5}{x^2+x-6}=\dfrac{a}{x+3}+\dfrac{b}{x-2}$　　(2) $\dfrac{14x-8}{(x-1)^2(x+2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}+\dfrac{c}{x+2}$

類題 20-2　$2x^2+axy-2y^2+7x+y+b=(2x+y+c)(x-2y+d)$ が，x，y についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

類題 20-3　$(2a-3)x+(a-2)y-4a+6=0$ が，a のどのような値に対しても成り立つように，定数 x，y の値を定めよ。

❶ 恒等式　等式には，$(x+1)^2=x^2+2x+1$ のように，その中に含まれる文字がどのような値をとっても成り立つものがある。このような等式を**恒等式**という。

▶ これに対して $x^2+2x=x+6$ のように，特定の x の値（$x=-3$，2）に対してのみ成り立つような等式が方程式である。

❷ 未定係数法　与えられた等式が恒等式となるように係数を決定する方法を**未定係数法**という。

未定係数法には，次に述べる**数値代入法**と**係数比較法**とがある。

❸ 数値代入法　恒等式に適当な値を代入して，未定係数についての連立方程式を作り，それを解く。このとき，"十分性の証明"（求めた係数を用いれば，恒等式となることを確かめること）をしなければならない。その際，次のことを利用してもよい。

▶ 下の①の証明を参照。

$P(x)$，$Q(x)$ が n 次以下の整式で，異なる $(n+1)$ 個の値について $P(x)=Q(x)$ が成り立てば，$P(x)=Q(x)$ は恒等式である。 CHECK

▷ 一般に，両辺が整式である等式が恒等式であるための条件は，次数の等しい項の係数がすべて等しいことである。

❹ 係数比較法　例えば，x の2次式についての等式が恒等式となる条件は，次の通りである。

① **$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式 $\iff a=b=c=0$** CHECK

② **$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式 $\iff a=a'$，$b=b'$，$c=c'$**

MEMO〔①の証明〕 $ax^2+bx+c=0$ ……① が恒等式であるとする。

①に $x=0$ を代入すると $c=0$

①に $x=-1$ を代入すると $a-b+c=0$

①に $x=1$ を代入すると $a+b+c=0$

これらを解いて $a=b=c=0$

逆に，$a=b=c=0$ のとき，①は $0\cdot x^2+0\cdot x+0=0$ となり，確かに恒等式である。■

▶ これは，$x=0$，-1，1 のとき成り立つとして求めたものであるから，①が成り立つのに必要な条件である。したがって，①が成り立つのに十分な条件であることを示しておかなければならない。

▷ ②は①から導かれる。

21 基本例題 等式の証明

基本 標準 発展

次の等式を証明せよ。

(1) $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$

(2) $a^4+4b^4=\{(a+b)^2+b^2\}\{(a-b)^2+b^2\}$

22 標準例題 条件付きの等式の証明

基本 標準 発展

$a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1) $2a^2+bc=(b-a)(c-a)$　　(2) $a^3+b^3+c^3=3abc$

類題 21 次の等式を証明せよ。

(1) $2(a^4+b^4)=(a^2+b^2)^2+(a-b)^2(a+b)^2$

(2) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

(3) $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

(4) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

類題 22-1 $x+y=1$ のとき，$x^2+y^2+1=2(x+y-xy)$ を証明せよ。

類題 22-2 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1) $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$

(2) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc=0$

23 基本例題　比例式と等式の証明

基本｜標準｜発展

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a^2+b^2}{b^2}=\dfrac{c^2+d^2}{d^2}$ が成り立つことを証明せよ。

24 標準例題　連比と等式の証明

基本｜標準｜発展

$x:y:z=(b+c):(c+a):(a+b)$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$$

類題 23　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\dfrac{2a+3c}{2b+3d}=\dfrac{c}{d}$　　(2)　$(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$

類題 24　$x:y:z=(b-c):(c-a):(a-b)$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$ax+by+cz=0$$

19 基本例題

(1) 右辺を展開して整理すると，等式は

$2x^2-7x-2=ax^2+(-2a+b)x+a+b+c$

となる。

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$2=a$，$-7=-2a+b$，$-2=a+b+c$

これらを解いて　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=-3}$，$\boldsymbol{c=-1}$　…答

(2) 等式の両辺に $x=-1$，1，2 をそれぞれ代入すると➡❸

$6=6b$，$18=-2c$，$24=3a$

よって　$a=8$，$b=1$，$c=-9$

逆に，これらを等式に代入すると，左辺＝右辺が成り立ち，x についての恒等式の意味で成り立つ。➡❹

答　$\boldsymbol{a=8}$，$\boldsymbol{b=1}$，$\boldsymbol{c=-9}$

19-1

解答　(1) 右辺を展開して整理すると，等式は

$2x^2-3=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$ となる。

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$a=2$，$2a+b=0$，$a+b+c=-3$

これを解いて　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=-4}$，$\boldsymbol{c=-1}$

(2) 等式の両辺に $x=-1$，0，1 をそれぞれ代入すると

$2c=-35$，$-a=-30$，$2b=-25$

よって　$a=30$，$b=-\dfrac{25}{2}$，$c=-\dfrac{35}{2}$

逆に，これらを等式に代入すると，左辺＝右辺が成り立ち，x についての恒等式となる。

←数値代入法では十分性の証明を示すこと。

すなわち　$\boldsymbol{a=30}$，$\boldsymbol{b=-\dfrac{25}{2}}$，$\boldsymbol{c=-\dfrac{35}{2}}$

19-2

解答　3 次式を 2 次式で割るから，商は 1 次式である。

商を $px+q$ とすると，条件より割り切れるから

$x^3-3x^2+ax+b=(x^2-x+1)(px+q)$ は恒等式。

右辺を展開すると

$x^3-3x^2+ax+b=px^3+(-p+q)x^2+(p-q)x+q$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$p=1$，$-p+q=-3$，$p-q=a$，$q=b$

これから　$p=1$，$q=-2$

よって　$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=-2}$

〔別解〕 $(x^3-3x^2+ax+b)\div(x^2-x+1)$ を実行すると，商は $x-2$，余りは $(a-3)x+b+2$

割り切れるから，余り $(a-3)x+b+2=0$ は恒等式。

したがって　$a-3=0$，$b+2=0$

すなわち　$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=-2}$

20 標準例題

(1) $x^3-x=x(x+1)(x-1)$ であるから，与えられた等式の両辺に $x(x+1)(x-1)$ を掛けると

$1=ax(x+1)+b(x-1)(x+1)+cx(x-1)$　…①

この等式が，x についての恒等式となればよい。

①の両辺に $x=-1$，0，1 をそれぞれ代入すると➡❷

$1=2c$，$1=-b$，$1=2a$

よって　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=-1$，$c=\dfrac{1}{2}$

逆に，これらを①に代入すると左辺＝右辺が成り立ち，x についての恒等式となる。

よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$，$\boldsymbol{b=-1}$，$\boldsymbol{c=\dfrac{1}{2}}$　…答

(2) 右辺を展開して整理すると，等式は

$2x^2+axy+by+c=2x^2+3xy+(-c-2)x-3y+c$

となる。この式が，x，y についての恒等式となるとき，両辺の同類項の係数を比較して

$a=3$，$0=-c-2$➡❸，$b=-3$

よって　$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=-3}$，$\boldsymbol{c=-2}$　…答

20-1

解答　(1) $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ であるから，与えられた等式の両辺に $(x+3)(x-2)$ を掛けると

$5x+5=a(x-2)+b(x+3)$

すなわち　$5x+5=(a+b)x-2a+3b$

この式が，x についての恒等式となればよいから，両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$5=a+b$，$5=-2a+3b$

これを解いて　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=3}$

〔注意〕 数値代入法を用いてもよい。

(2) 与えられた等式の両辺に $(x-1)^2(x+2)$ を掛けると

$14x-8=a(x-1)(x+2)+b(x+2)+c(x-1)^2$　…①

この式が x についての恒等式となればよい。

①の両辺に $x=-2$，1，0 を代入すると

←①の右辺の形から $\boldsymbol{x=-2}$，**1** を代入すると簡単になる。未知数は **3** つであるから，あと **1** つ方程式が必要である。$\boldsymbol{x=0}$ や $\boldsymbol{x=-1}$ などが適当である。

$-36=9c$，$6=3b$，$-8=-2a+2b+c$

これから　$a=4$，$b=2$，$c=-4$

逆に，これらを①に代入すると，左辺＝右辺が成り立ち，x についての恒等式となる。

すなわち　$\boldsymbol{a=4}$，$\boldsymbol{b=2}$，$\boldsymbol{c=-4}$

20-2

解答　右辺を展開して整理すると

$2x^2+axy-2y^2+7x+y+b$

$=2x^2-3xy-2y^2+(c+2d)x+(-2c+d)y+cd$

x, y についての恒等式であるから，両辺の同類項の係数を比較して

$a=-3$, $7=c+2d$, $1=-2c+d$, $b=cd$

これから　$\boldsymbol{a=-3}$, $\boldsymbol{b=3}$, $\boldsymbol{c=1}$, $\boldsymbol{d=3}$

20-3

解答　左辺を a について整理すると

$(2x+y-4)a+(-3x-2y+6)=0$ となる。

これが a についての恒等式であることから，両辺の係数を比較して ←右辺は $\boldsymbol{0\cdot a+0}$ とみる。

$2x+y-4=0$ かつ $-3x-2y+6=0$

これを解いて　$\boldsymbol{x=2}$, $\boldsymbol{y=0}$

21 基本例題

(1)　$(a-b)^2+4ab=a^2-2ab+b^2+4ab$

$=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

ゆえに　$(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$ ■

(2)　$\{(a+b)^2+b^2\}\{(a-b)^2+b^2\}$ ➡❸

$=(a^2+2ab+b^2+b^2)(a^2-2ab+b^2+b^2)$

$=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$

$=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2$ ➡❹

$=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2=a^4+4b^4$

ゆえに　$a^4+4b^4=\{(a+b)^2+b^2\}\{(a-b)^2+b^2\}$ ■

21

解答　(1) 右辺 $=(a^2+b^2)^2+\{(a-b)(a+b)\}^2$

$=(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2$　← $A^2B^2=(AB)^2$ を用いた。

$=a^4+2a^2b^2+b^4+a^4-2a^2b^2+b^4$

$=2a^4+2b^4=2(a^4+b^4)=$ 左辺 ■

(2) 左辺 $=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

右辺 $=a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2$

$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

よって　左辺＝右辺 ■

(3) 右辺 $=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3-a^3b-a^2b^2-ab^3-b^4$

$=a^4-b^4=$ 左辺 ■

(4) 左辺 $=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)$

$+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=$ 右辺 ■

22 標準例題

(1)　$a+b+c=0$ より，$c=-a-b$ であるから

$2a^2+bc=2a^2+b(-a-b)$

$=2a^2-ab-b^2$

$(b-a)(c-a)=(b-a)\{(-a-b)-a\}$

$=(b-a)(-2a-b)$

$=2a^2-ab-b^2$

ゆえに　$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$ ■

(2)　$a+b+c=0$ であるから

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0$　　ゆえに　$a^3+b^3+c^3=3abc$ ■

〔(1)の別解〕

左辺－右辺が，$a+b+c$ を因数にもつことを示してもよい。

〔証明〕　$2a^2+bc-(b-a)(c-a)$

$=2a^2+bc-(bc-ab-ca+a^2)$

$=a^2+ab+ca$

$=a(a+b+c)$

$=0$　　ゆえに　$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$ ■

〔(2)の別解〕

条件式から c を消去し，左辺，右辺を別々に計算し，等しくなることを示してもよい。

〔証明〕　$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ であるから

$a^3+b^3+c^3$

$=a^3+b^3-(a+b)^3$

$=a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

$=-3a^2b-3ab^2$

$3abc$

$=3ab\{-(a+b)\}$

$=-3a^2b-3ab^2$

ゆえに　$a^3+b^3+c^3=3abc$ ■

22-1

解答　$x+y=1$ から　$y=1-x$

$x^2+y^2+1=x^2+(1-x)^2+1$

$=2x^2-2x+2$

$2(x+y-xy)=2\{x+(1-x)-x(1-x)\}$

$=2x^2-2x+2$

よって　$x^2+y^2+1=2(x+y-xy)$ ■

22-2

解答　(1) $a+b+c=0$ より，$c=-a-b$ であるから

$a^2-bc=a^2-b(-a-b)$

$=a^2+ab+b^2$

$b^2-ca=b^2-(-a-b)a$

$=a^2+ab+b^2$

$c^2-ab=(-a-b)^2-ab$

$=a^2+2ab+b^2-ab$

$=a^2+ab+b^2$

ゆえに　$a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$ ■

(2) $a+b+c=0$ より $c=-a-b$ であるから

$$\begin{aligned}&a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc\\&=a^2(b-a-b)+b^2(-a-b+a)\\&\quad+(-a-b)^2(a+b)+3ab(-a-b)\\&=-a^3-b^3+(a+b)^3-3a^2b-3ab^2\\&=-a^3-b^3+a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2\\&=0 \blacksquare\end{aligned}$$

〔別解〕 $a+b+c=0$ より

$b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$

であるから

$$\begin{aligned}&a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc\\&=a^2(-a)+b^2(-b)+c^2(-c)+3abc\\&=-(a^3+b^3+c^3-3abc)\\&=-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$

←3 次式の因数分解公式

$=0$ （$a+b+c=0$ より）■

23 基本例題

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk,\ c=dk$

よって　$\dfrac{a^2+b^2}{b^2}=\dfrac{(bk)^2+b^2}{b^2}=\dfrac{(k^2+1)b^2}{b^2}=k^2+1$ ➡❶

$\dfrac{c^2+d^2}{d^2}=\dfrac{(dk)^2+d^2}{d^2}=\dfrac{(k^2+1)d^2}{d^2}=k^2+1$

したがって　$\dfrac{a^2+b^2}{b^2}=\dfrac{c^2+d^2}{d^2}$ ■

23

解答　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk,\ c=dk$

(1) $\dfrac{2a+3c}{2b+3d}=\dfrac{2bk+3dk}{2b+3d}=\dfrac{(2b+3d)k}{2b+3d}=k$

$\dfrac{c}{d}=\dfrac{dk}{d}=k$　　ゆえに　$\dfrac{2a+3c}{2b+3d}=\dfrac{c}{d}$ ■

(2) $(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(b^2k^2+d^2k^2)(b^2+d^2)$
$=(b^2+d^2)^2k^2$

$(ab+cd)^2=(b^2k+d^2k)^2=(b^2+d^2)^2k^2$

ゆえに　$(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$ ■

24 標準例題

$\dfrac{x}{b+c}=\dfrac{y}{c+a}=\dfrac{z}{a+b}=k$ とおくと

$x=(b+c)k,\ y=(c+a)k,\ z=(a+b)k$ ➡❷

これらを左辺に代入すると

$$\begin{aligned}&a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)\\&=a\{(c+a)k-(a+b)k\}+b\{(a+b)k-(b+c)k\}\\&\qquad+c\{(b+c)k-(c+a)k\}\\&=a(c-b)k+b(a-c)k+c(b-a)k\\&=(ca-ab+ab-bc+bc-ca)k=0\cdot k=0 \blacksquare\end{aligned}$$

24

解答　$\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}=k$ とおくと

$x=(b-c)k,\ y=(c-a)k,\ z=(a-b)k$

$$\begin{aligned}ax+by+cz&=a(b-c)k+b(c-a)k+c(a-b)k\\&=(ab-ac+bc-ab+ac-bc)k\\&=0\cdot k=0 \blacksquare\end{aligned}$$