高校数学演習　不等式の証明

26 基本例題　**不等式の証明 [1]**　基本|標準|発展

次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $x^2>6x-10$　　(2) $a^2+2ab+2b^2-2b+1\geqq 0$

(3) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

27 標準例題　**不等式の証明 [2]**　基本|標準|発展

次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a>b>0$ のとき　$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

(2) $a>0$，$b>0$ のとき　$\sqrt{2(a+b)}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

〔不等式の証明でよく用いられる性質〕

[1]　平方完成して，(実数)$^2\geqq 0$ を利用する。

[2]　$A>B \iff A-B>0$　(差をとって，符号を調べる)

[3]　$A>0$，$B>0$ のとき　$A>B \iff A^2>B^2$

(平方したものを比べる)

類題 26-1　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a^2+2ab+3b^2\geqq 0$　　(2) $x^2>3x-3$

(3) $a^2+2ab+2b^2+2a-4b+10\geqq 0$　　(4) $a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$

(5) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$

類題 26-2　$a+b+c>0$ のとき，不等式 $a^3+b^3+c^3\geqq 3abc$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

類題 27　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a>b>0$ のとき　$\sqrt{4a-b}>2\sqrt{a}-\sqrt{b}$

(2) a，b，m，n が正の数で，$m+n=1$ のとき　$\sqrt{ma+nb}\geqq m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$

〔「$\boldsymbol{A^2>B^2}$ ならば $\boldsymbol{A>B}$」は成り立つか〕

$A^2>B^2$ のとき $A^2-B^2>0$ である。よって　$(A+B)(A-B)>0$

　　$A+B>0$ のときは $A-B>0$ となるので $A>B$ である。

　　$A+B<0$ のときは $A-B<0$ となるので $A<B$ である。

　　(例えば，$(-5)^2>3^2$ であるが $-5<3$ である。)

すなわち，$\boldsymbol{A>0}$，$\boldsymbol{B>0}$ のときは，$\boldsymbol{A+B>0}$ であるから，$\boldsymbol{A^2>B^2}$ ならば $\boldsymbol{A>B}$ は成り立つ。

29 標準例題 相加平均と相乗平均 基本 標準 発展

$a>0$, $b>0$, $c>0$とするとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a+\dfrac{4}{a}\geqq 4$　(2) $(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8abc$　(3) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{4}{a}+b\right)\geqq 9$

相加平均と相乗平均　正の数 a, b に対して

$\dfrac{a+b}{2}$ を**相加平均**，$\sqrt{ab}$ を**相乗平均**

という。相加平均と相乗平均には次の大小関係がある。

〔相加平均と相乗平均の大小関係〕

a, b が正のとき $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

(相加平均)≧(相乗平均)

等号は $a=b$ のときに限り成り立つ。

MEMO (i) 差をとることによって証明してみよう。

〔証明〕 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

ここで，$a>0$, $b>0$ であるから

$$\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqq 0$$

ゆえに $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ ■

等号が成り立つのは，$\sqrt{a}=\sqrt{b}$，すなわち $a=b$ のときである。

(ii) 平方したものを比べることによって証明してみよう。

〔証明〕 $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-(\sqrt{ab})^2=\dfrac{(a+b)^2-4ab}{4}=\dfrac{(a-b)^2}{4}\geqq 0$

ゆえに $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\geqq(\sqrt{ab})^2$

$\dfrac{a+b}{2}>0$, $\sqrt{ab}>0$ であるから $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ ■

不等式
$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ を，
$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$
の形で用いることが多い。

類題 29 $a>0$, $b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{4b}\geqq 1$　(2) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$　(3) $\left(4a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right)\geqq 9$

●解答・解説

26 基本例題 (1) $x^2-(6x-10)=x^2-6x+10$

$=(x-3)^2+1>0$ ➡❶

ゆえに　$x^2>6x-10$ ■

(2) $a^2+2ab+2b^2-2b+1=(a+b)^2+b^2-2b+1$ ➡❷

$=(a+b)^2+(b-1)^2\geqq 0$ ➡❸　…①

ゆえに　$a^2+2ab+2b^2-2b+1\geqq 0$ ■

等号が成り立つのは，①より $a+b=0$ かつ $b-1=0$ ➡❹

すなわち　$\boldsymbol{a=-1}$，$\boldsymbol{b=1}$ のときである。　…答

(3) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$

$=(bx-ay)^2\geqq 0$　…①

ゆえに　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$ ➡❺ ■

等号が成り立つのは，①より $bx-ay=0$　すなわち

$\boldsymbol{ay=bx}$ のときである。　…答

❶ $(x-3)^2\geqq 0$ であるから，$(x-3)^2+1>0$ これを左のように簡単に書いてもよい。

❷ a について平方完成した。

❸ $(a+b)^2\geqq 0$，$(b-1)^2\geqq 0$ であるから，この段階で「$\geqq 0$」と書く。

❹ $A^2+B^2=0$ が成り立つのは，$A=0$ かつ $B=0$ のときに限る。

❺ $A-B\geqq 0$ $\iff A\geqq B$

26-1

解答 (1) $a^2+2ab+3b^2=a^2+2ab+b^2+2b^2$

$=(a+b)^2+2b^2\geqq 0$ ■

等号が成り立つのは，$a+b=0$ かつ $b=0$

すなわち $\boldsymbol{a=b=0}$ のときである。

(2) $x^2-(3x-3)=x^2-3x+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+3$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$　　ゆえに　$x^2>3x-3$ ■

(3) $a^2+2ab+2b^2+2a-4b+10$

$=a^2+2(b+1)a+2b^2-4b+10$ ← a について整理した。

$=\{a+(b+1)\}^2-(b+1)^2+2b^2-4b+10$

← a について，平方完成した。

$=(a+b+1)^2+b^2-6b+9$

$=(a+b+1)^2+(b-3)^2\geqq 0$ ■

等号が成り立つのは，$a+b+1=0$ かつ $b-3=0$

すなわち $\boldsymbol{a=-4}$，$\boldsymbol{b=3}$ のときである。

(4) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=a^2-(b+c)a+b^2-bc+c^2$ ← a について整理した。

$=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2-\frac{(b+c)^2}{4}+b^2-bc+c^2$

← a について，平方完成した。

$=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2-\frac{3}{2}bc+\frac{3}{4}c^2$

$=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b^2-2bc+c^2)$

$=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2\geqq 0$

ゆえに　$a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$ ■

等号が成り立つのは，$a-\frac{b+c}{2}=0$ かつ $b-c=0$

すなわち $\boldsymbol{a=b=c}$ のときである。

〔別解〕 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq 0$

ゆえに　$a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$ ■

等号が成り立つのは，$a-b=0$ かつ $b-c=0$

かつ $c-a=0$ すなわち $\boldsymbol{a=b=c}$ のときである。

(5) 左辺－右辺

$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2$

$+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2$

$-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx)$

$=(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)$

$+(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(c^2x^2-2cazx+a^2z^2)$

$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2\geqq 0$

ゆえに

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ ■

等号が成り立つのは，$ay-bx=0$ かつ $bz-cy=0$ かつ $cx-az=0$ すなわち $\boldsymbol{ay=bx}$ かつ $\boldsymbol{bz=cy}$ かつ $\boldsymbol{cx=az}$ のときである。

〔補足〕 (5)はコーシー・シュヴァルツの不等式と呼ばれるものである。等号が成り立つのは「$a=b=c=0$ またはある実数 k に対して $x=ak$，$y=bk$，$z=ck$ となるとき」としてもよい。

26-2

解答 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ ← 本冊 p. 11

$=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)$

$\times(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq 0$

($a+b+c>0$ より)

ゆえに $a^3+b^3+c^3\geqq 3abc$ ∎

等号が成り立つのは，$a-b=0$ かつ $b-c=0$ かつ $c-a=0$ すなわち $\boldsymbol{a=b=c}$ のときである。

27 標準例題

(1) 両辺の平方の差をとると

$(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-b-(a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)$

$=2\sqrt{a}\sqrt{b}-2b$ ➡❷

$=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$ ($a>b>0$ より)

よって $(\sqrt{a-b})^2>(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ …①

ここで，$\sqrt{a-b}>0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$であるから➡❸

①より $\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ∎

(2) 両辺の平方の差をとると

$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=2(a+b)-(a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)$

$=a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0$ …①

よって $\{\sqrt{2(a+b)}\}^2\geqq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ …②

ここで，$\sqrt{2(a+b)}>0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$であるから➡❸

②より $\sqrt{2(a+b)}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ∎

等号が成り立つのは，①より $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ ➡❹ すなわち $\boldsymbol{a=b}$ のときである。…答

27

解答 (1) 両辺の平方の差をとると

$(\sqrt{4a-b})^2-(2\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$=4a-b-(4a-4\sqrt{a}\sqrt{b}+b)$

$=4\sqrt{a}\sqrt{b}-2b$

$=2\sqrt{b}(2\sqrt{a}-\sqrt{b})$ …①

ここで，$a>b>0$ であるから

$2\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a}+\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ …②

← $\sqrt{a}>\sqrt{b}$ より $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ である。

よって，①は正であるから

$(\sqrt{4a-b})^2>(2\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ …③

ここで，$a>b$ より $4a-b>0$

← $4a-b=3a+a-b>0$ である。

よって $\sqrt{4a-b}>0$

また，②より $2\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ であるから，③より

$\sqrt{4a-b}>2\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ∎

(2) 両辺の平方の差をとると

$(\sqrt{ma+nb})^2-(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})^2$

$=ma+nb-(m^2a+2mn\sqrt{ab}+n^2b)$

$=m(1-m)a-2mn\sqrt{ab}+n(1-n)b$

$=mna-2mn\sqrt{ab}+mnb$ ← 条件 $m+n=1$ を用いた

$=mn(a-2\sqrt{ab}+b)$

$=mn(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0$ …①

よって $(\sqrt{ma+nb})^2\geqq(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})^2$ …②

ここで，$\sqrt{ma+nb}>0$, $m\sqrt{a}+n\sqrt{b}>0$ であるから

②より $\sqrt{ma+nb}\geqq m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$ ∎

等号が成り立つのは， ①より $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$

すなわち $\boldsymbol{a=b}$ のときである。

29 標準例題

(1) $a>0$, $\dfrac{4}{a}>0$ より，相加平均と相乗平均の大小関係により $a+\dfrac{4}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{4}{a}}=4$ 　ゆえに $a+\dfrac{4}{a}\geqq 4$ ■

等号が成り立つのは，$a=\dfrac{4}{a}$ すなわち $a^2=4$ のときで，

$a>0$ より，$\boldsymbol{a=2}$ **のときである。** …答

(2) $a>0$, $b>0$, $c>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$, $b+c\geqq 2\sqrt{bc}$, $c+a\geqq 2\sqrt{ca}$

3つの不等式の各辺は正であるから，→❶ 辺々を掛け合わせて $(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}=8abc$ ■

等号が成り立つのは，$a=b$ かつ $b=c$ かつ $c=a$

すなわち $\boldsymbol{a=b=c}$ **のときである。** …答

(3) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{4}{a}+b\right)=4+ab+\dfrac{4}{ab}+1=ab+\dfrac{4}{ab}+5$ …① →❷

ここで，$ab>0$, $\dfrac{4}{ab}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により $ab+\dfrac{4}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\dfrac{4}{ab}}=4$ …②

よって，①より $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{4}{a}+b\right)\geqq 4+5=9$ ■

等号が成り立つのは，②より $ab=\dfrac{4}{ab}$

すなわち $a^2b^2=4$ のときで，

$a>0$, $b>0$ より，$\boldsymbol{ab=2}$ **のときである。** …答

っている。

❶この断りは必要である。負の数があると，掛け合わせたときに，大小関係が変わることがある。例えば

$3>-5$

$-3>-5$

辺々掛け合わせると

$-9<25$

となって，成り立たない。

❷(3)は相加平均と相乗平均を繰り返し用いて次のようにしても(3)の証明に行きつかない。

$a+\dfrac{1}{b}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{b}}$,

$\dfrac{4}{a}+b\geqq 2\sqrt{\dfrac{4}{a}\cdot b}$

の辺々を掛け合わせて

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{4}{a}+b\right)$

$\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot 2\sqrt{\dfrac{4b}{a}}$ より

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{4}{a}+b\right)\geqq 8$

これは，掛け合わせた2つの不等式の等号の成立条件が違うからである。

29

解答 (1) $\dfrac{b}{a}>0$, $\dfrac{a}{4b}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{4b}\geqq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{4b}}=1$

ゆえに $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{4b}\geqq 1$ ■

等号が成り立つのは，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{4b}$

すなわち $a^2=4b^2$ のときで，

$a>0$, $b>0$ より $\boldsymbol{a=2b}$ **のときである。**

(2) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1$

$=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2$ …①

$\dfrac{a}{b}>0$, $\dfrac{b}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=2$ …②

よって，①より $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 2+2=4$ ■

等号が成り立つのは，

②より $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$ 　すなわち $a^2=b^2$ のときで，

$a>0$, $b>0$ より $\boldsymbol{a=b}$ **のときである。**

〔別解〕 相加平均と相乗平均の大小関係を用いる。

$a>0$, $b>0$ より $a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ …①

$\dfrac{1}{a}>0$, $\dfrac{1}{b}>0$ より $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqq 2\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}}$ …②

①，②の等号の成立条件はともに $a=b$ であり，

①，②の各辺は正であるから，

辺々を掛け合わせて

$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}}=4\sqrt{ab\cdot\dfrac{1}{ab}}=4$

ゆえに $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$ ■

等号が成り立つのは $\boldsymbol{a=b}$ **のときである。**

(3) $\left(4a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right)=4ab+4+1+\dfrac{1}{ab}$

$$=4ab+\frac{1}{ab}+5 \quad \cdots①$$

$4ab>0$, $\dfrac{1}{ab}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$4ab+\frac{1}{ab}\geqq 2\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4 \quad \cdots②$$

よって，①より　$\left(4a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right)\geqq 4+5=9$ ∎

等号が成り立つのは，②より

$4ab=\dfrac{1}{ab}$ すなわち $a^2b^2=\dfrac{1}{4}$ のときで，$a>0$，$b>0$ より $\boldsymbol{ab=\dfrac{1}{2}}$ **のとき**である。

〔注意〕

(3)の誤答の例を示しておく。

$4a>0$，$\dfrac{1}{b}>0$ より　$4a+\dfrac{1}{b}\geqq 2\sqrt{4a\cdot\dfrac{1}{b}}$ $\quad\cdots①$

$b>0$，$\dfrac{1}{a}>0$ より　$b+\dfrac{1}{a}\geqq 2\sqrt{b\cdot\dfrac{1}{a}}$ $\quad\cdots②$

①，②の各辺は正であるから，辺々を掛け合わせて

$$\left(4a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geqq 4\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=8$$

ゆえに　$\left(4a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right)\geqq 8 \quad\cdots③$

これは，(3)の証明にはなっていない。

不等式③は成り立つが，等号が成り立つことはない。これは③で等号が成り立つのは，

$4a=\dfrac{1}{b}$ かつ $b=\dfrac{1}{a}$ のときであるが，このような a，b は存在しないからである。