中３数学　20240601演習問題

1　次の問いに答えなさい。

(1)　次の各問いに答えなさい。

①　$\dfrac{4}{5}+\left(-\dfrac{4}{9}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^3-\left(-\dfrac{8}{15}\right)$ を計算しなさい。

②　$\dfrac{x+4y}{3}-\dfrac{5x-7y}{12}+x-2y$ を計算しなさい。

③　$(x+2)(x-8)+(x-4)^2$ を因数分解しなさい。

④　$\sqrt{8}\times\sqrt{3}-\sqrt{2}\,(\sqrt{27}-5)-\dfrac{10}{\sqrt{2}}$ を計算しなさい。

⑤　連立方程式 $\begin{cases} 0.25x+0.15y=0.6 \\ \dfrac{7}{6}x-\dfrac{1}{4}y=-\dfrac{23}{4} \end{cases}$ を解きなさい。

(2)　自然数 n に対して，n 以下のすべての自然数の積を≪ n ≫と表すことにする。例えば，≪ 4 ≫ $=1\times2\times3\times4=24$ である。このとき，≪ 8 ≫ − ≪ 5 ≫ $\times16$ の値を求めなさい。

(3)　$\sqrt{60n}$ と $\sqrt{n+90}$ がどちらも整数となる最小の自然数 n の値を求めなさい。

(4)　a，b，c は自然数で，$ab=120$，$bc=40$，$ca=75$ のとき，$a+b+c$ の値を求めなさい。

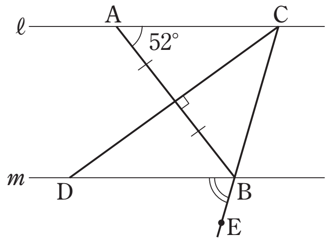
2 次の問いに答えなさい。

(1) $y-2$ は $x+5$ に比例し，$x=5$ のとき $y=22$ である。$x=-4$ のときの y の値を求めなさい。

(2) 座標平面上で，4つの直線 $y=2x+5$，$y=2x-7$，$y=-\frac{1}{3}x+5$，$y=-\frac{1}{3}x-7$ で囲まれた四角形の面積を求めなさい。ただし，座標軸の1目もりを1cmとする。

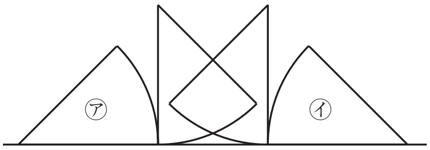
(3) 右の図で，$\ell /\!/ m$ であり，点Aは直線 ℓ 上に，点Bは直線 m 上にある。線分ABをひき，線分ABの垂直二等分線と直線 ℓ，m との交点をそれぞれC，Dとする。また，線分BCの点B側の延長上に点Eをとる。

∠BAC＝52°のとき，∠DBEの大きさを求めなさい。



(4) 右の図のように，半径が4cm，中心角が45°であるおうぎ形が直線上をすべることなく㋐の状態からはじめて㋑の状態になるまで転がるとする。

このとき，おうぎ形が通る部分の面積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。



3 0，1，8，9の4種類の数字を用いて整数をつくり，次のように小さい順に並べていく。

0，1，8，9，10，11，18，19，80，81，88，89，…，100，101，…

このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 45番目の数を求めなさい。

(2) 9810は何番目の数か求めなさい。

4 1，2，3が1つずつ書かれた赤玉，白玉，青玉がそれぞれ3個ずつ合計9個ある。この9個の玉を袋の中に入れて，よくかき混ぜてから2個の玉を同時に取り出す。

このとき，次の確率を求めなさい。

(1) 取り出した2個の玉が同じ色である確率

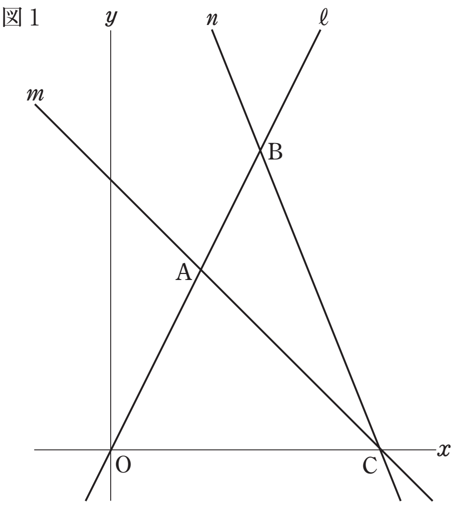
(2) 取り出した2個の玉が，色も，書かれている数も異なる確率

(3) 取り出した2個の玉の色が異なるか，書かれている数の積が3の倍数となる確率

5　右の図１で，直線ℓの式は$y=2x$，直線mの式は$y=-x+9$で，直線nは傾きが$-\dfrac{5}{2}$である。また，点Aは直線ℓと直線mとの交点，点Bは直線ℓと直線nとの交点であり，x軸上の点Cは直線mと直線nとの交点である。

　このとき，次の問いに答えなさい。ただし，座標軸の１目もりを１cmとする。

図１

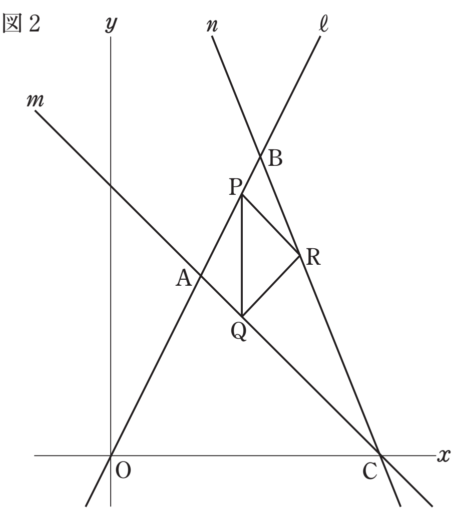


⑴　△ABCの面積を求めなさい。

⑵　図２のように，△PQRの頂点Pは線分AB上，頂点Qは線分AC上にあり，辺PQはy軸に平行である。また，頂点Rは線分BC上にある。

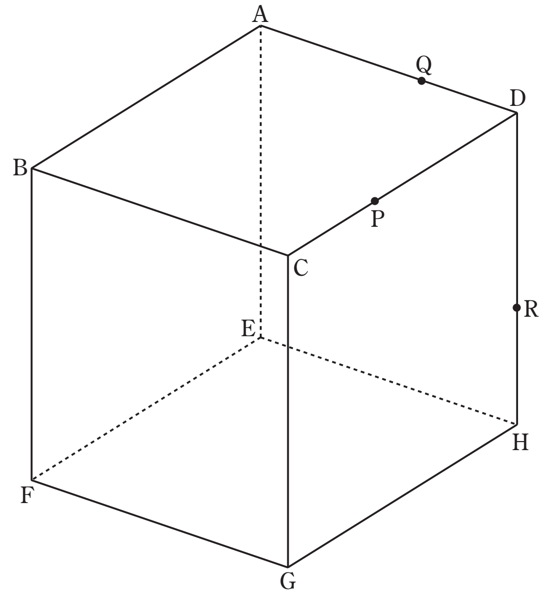
　点Rのy座標が$\dfrac{27}{4}$で，△PQRがPR＝QRの二等辺三角形になるとき，△PQRの面積を求めなさい。

図２



6 右の図は，1 辺の長さが 8 cm の立方体ABCD−EFGHで，点Pは辺CD上，点Qは辺AD上，点Rは辺DH上にあり，CP＝DQ＝HR＝3 cmである。

このとき，次の問いに答えなさい。



(1) 4 点H，P，Q，Rを頂点とする四面体の体積を求めなさい。

(2) 点Rと 3 点H，P，Qを通る平面との距離を求めなさい。

(3) 4 点F，G，P，Qを頂点とする四面体の体積を求めなさい。

20240601　中３数学　土曜演習問題

氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　得点＿＿＿＿

1

(1)	①	②
	③	④
	⑤ $x=$　　　，$y=$ (完答)	
(2)		(3) $n=$
(4)		

1 (1) 各3点×5＝15点 ⑩

1 (2)～(4) 各5点×3＝15点 ⑪

2

(1)	$y=$	(2)	cm^2
(3)	度	(4)	cm^2

2 各5点×4＝20点 ⑫

3

(1)		(2)	番目

3 各5点×2＝10点 ⑬

4

(1)		(2)	
(3)			

4 各5点×3＝15点 ⑭

5

(1)	cm^2	(2)	cm^2

5 各5点×2＝10点 ⑮

6

(1)	cm^3	(2)	cm
(3)	cm^3		

6 各5点×3＝15点 ⑯

20240601　中３数学　土曜演習問題

中学ハイレベルテスト　**数学**　中学３年——解答と解説　2023年度６月号

解答

1 ⑴ ① 2　② $\frac{11x-y}{12}$　③ $2x(x-7)$　④ $-\sqrt{6}$　⑤ $(x=)-3$，$(y=)9$
　⑵ 38400　⑶ $(n=)135$　⑷ 28
2 ⑴ $(y=)4$　⑵ $\frac{432}{7}(\mathrm{cm}^2)$　⑶ 76(度)　⑷ $12\pi(\mathrm{cm}^2)$
3 ⑴ 890　⑵ 229(番目)
4 ⑴ $\frac{1}{4}$　⑵ $\frac{1}{2}$　⑶ $\frac{11}{12}$
5 ⑴ $18(\mathrm{cm}^2)$　⑵ $\frac{81}{20}(\mathrm{cm}^2)$
6 ⑴ $\frac{15}{2}(\mathrm{cm}^3)$　⑵ $\frac{45}{49}(\mathrm{cm})$　⑶ $\frac{160}{3}(\mathrm{cm}^3)$

配点

1 ⑴各３点×５＝15点
　⑵〜⑷ 各５点×３＝15点
2 各５点×４＝20点
3 各５点×２＝10点
4 各５点×３＝15点
5 各５点×２＝10点
6 各５点×３＝15点

—採点基準—　1⑴⑤　完答。

〔解説〕

1 ⑴ ① $\frac{4}{5}+\left(-\frac{4}{9}\right)^2\times\left(\frac{3}{2}\right)^3-\left(-\frac{8}{15}\right)=\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{8}{15}=\frac{12}{15}+\frac{10}{15}+\frac{8}{15}=2$

② $\frac{x+4y}{3}-\frac{5x-7y}{12}+x-2y=\frac{4(x+4y)-(5x-7y)+12(x-2y)}{12}=\frac{4x+16y-5x+7y+12x-24y}{12}$
$=\frac{11x-y}{12}$

③ $(x+2)(x-8)+(x-4)^2=x^2-6x-16+x^2-8x+16=2x^2-14x=2x(x-7)$

④ $\sqrt{8}\times\sqrt{3}-\sqrt{2}\,(\sqrt{27}-5)-\frac{10}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}-3\sqrt{6}+5\sqrt{2}-\frac{10\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{6}$

⑤ $\begin{cases}0.25x+0.15y=0.6\cdots㋐\\ \frac{7}{6}x-\frac{1}{4}y=-\frac{23}{4}\cdots㋑\end{cases}$ とする。㋐より，$5x+3y=12$…㋒。㋑より，$14x-3y=-69$…㋓。
㋒＋㋓より，$19x=-57$，$x=-3$。これを㋒に代入して，$-15+3y=12$，$y=9$。

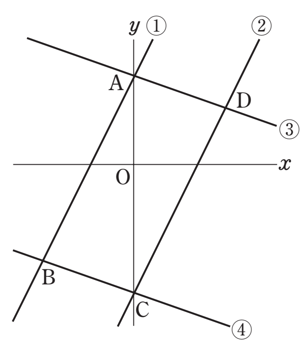
⑵ ≪８≫＝≪５≫×６×７×８，≪５≫×16＝≪５≫×２×８だから，
≪８≫－≪５≫×16＝≪５≫×８×(６×７－２)＝１×２×３×４×５×８×40＝24×1600＝38400。

⑶ $\sqrt{60n}=2\sqrt{15n}$ だから，$\sqrt{60n}$ が整数となる n の値は，小さい方から $(15\times1^2=)15$，$(15\times2^2=)60$，$(15\times3^2=)135$，…。これらを $\sqrt{n+90}$ に代入すると，$\sqrt{15+90}=\sqrt{105}$，$\sqrt{60+90}=\sqrt{150}$，$\sqrt{135+90}=\sqrt{225}=15$，…。よって，最小の自然数 n の値は $n=135$。

⑷ $ab=120$，$bc=40$，$ca=75$ より，$(abc)^2=120\times40\times75=360000$。$a$，$b$，$c$ は自然数だから，$abc=600$。
よって，$a=abc\div bc=600\div40=15$。同様にして，$b=8$，$c=5$。したがって，$a+b+c=15+8+5=28$。

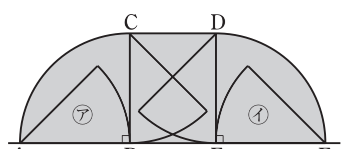
2 ⑴ $y-2=a(x+5)$ とおき，$x=5$，$y=22$ を代入すると，$22-2=a\times(5+5)$，$a=2$。
よって，式は $y=2(x+5)+2$ となる。これに $x=-4$ を代入すると，$y=2\times(-4+5)+2=4$。

⑵ ４つの直線 $y=2x+5$，$y=2x-7$，$y=-\frac{1}{3}x+5$，$y=-\frac{1}{3}x-7$ を，右の図のように①，②，③，④とおき，直線①と直線③，④との交点をそれぞれA，B，直線②と直線④，③との交点をそれぞれC，Dとする。
①//②，③//④より，四角形ABCDは平行四辺形だから，四角形ABCD＝２△ACD。
直線①，③の切片より，A(0，5)。直線②，④の切片より，C(0，－７)。直線②，③の式を連立方程式として解いて，点Dの座標を求めると，$\left(\frac{36}{7},\ \frac{23}{7}\right)$。
$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times\{5-(-7)\}\times\frac{36}{7}=\frac{216}{7}(\mathrm{cm}^2)$。求める面積は，$2\times\frac{216}{7}=\frac{432}{7}(\mathrm{cm}^2)$。



⑶ 点Cは線分ABの垂直二等分線上にあるから，AC＝BC。
よって，∠ACB＝180°－52°×２＝76°。$\ell // m$ より，同位角が等しいから，∠DBE＝∠ACB＝76°。

⑷ おうぎ形が通る部分は，右の図のおうぎ形BAC，長方形BEDC，おうぎ形EDFを組み合わせた形になる。おうぎ形BAC，EDFはどちらも，半径が4cm，中心角が90°だから，面積は $\pi\times4^2\times\frac{90}{360}=4\pi(\mathrm{cm}^2)$。長方形BEDCは縦が4cmで，横が半径4cm，中心角45°のおうぎ形の弧の長さに等しいから，
面積は $4\times\left(2\pi\times4\times\frac{45}{360}\right)=4\pi(\mathrm{cm}^2)$。よって，求める面積は，$4\pi\times3=12\pi(\mathrm{cm}^2)$。



3　(1)　0もふくめて，1桁の整数は4個。2桁の整数は$3\times4=12$(個)。百の位が1の3桁の整数は$4\times4=16$(個)。
百の位が8で，十の位が0か1か8である3桁の整数は$3\times4=12$(個)。
よって，889は$(4+12+16+12=)44$番目の数である。したがって，45番目の数は890。

(2)　「0をふくめた1桁の整数は千，百，十の位が0の4桁の整数」，「2桁の整数は千，百の位が0の4桁の整数」，「3桁の整数は千の位が0の4桁の整数」と考えると，0～8999の整数の個数は，$3\times4\times4\times4=192$(個)。また，9000～9199の整数の個数は，$1\times2\times4\times4=32$(個)。よって，9199は$(192+32=)224$番目の数である。9199のあとは，9800，9801，9808，9809，9810，…と続く。したがって，9810は229番目の数となる。

4　2個の玉の取り出し方は，全部で$\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$(通り)。

(1)　2個とも赤玉になる取り出し方は，$\dfrac{3\times2}{2\times1}=3$(通り)。同様にして，2個とも白玉になる取り出し方も，青玉になる取り出し方も3通り。よって，色が同じになる2個の玉の取り出し方は，$3\times3=9$(通り)。
したがって，求める確率は，$\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$。

(2)　取り出した玉が「赤と白」の場合，赤玉の3通りの数に対して，白玉の数は2通りずつ考えられるから，$3\times2=6$(通り)。取り出した玉が「赤と青」，「白と青」の場合も同様にして6通り。よって，色も数も異なる2個の玉の取り出し方は，$6\times3=18$(通り)。したがって，求める確率は，$\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2}$。

(3)　条件を満たす2個の玉の取り出し方は，次の㋐か㋑にふくまれ，㋐と㋑に重なりはない。
㋐取り出した2個の玉の色が異なる。
㋑取り出した2個の玉の色が同じで，数の積が3の倍数になる。
㋐…(1)より，$36-9=27$(通り)。
㋑…積が3の倍数になるとき，取り出した2個の玉の中に3がふくまれる。それぞれの色について，3をふくむ取り出し方は2通りずつあるので，$2\times3=6$(通り)。
㋐，㋑より，条件を満たす2個の玉の取り出し方は，$27+6=33$(通り)。
したがって，求める確率は，$\dfrac{33}{36}=\dfrac{11}{12}$。
〔別解〕「取り出した2個の玉の色が異なるか，書かれている数の積が3の倍数となる確率」は，「取り出した2個の玉の色が同じで，書かれている数の積が3の倍数でない」ことがらをA，その確率をpとすると，Aでない確率だから，$1-p$で求められる。Aを満たす2個の玉の取り出し方は，{赤1，赤2}，{白1，白2}，{青1，青2}の3通り。よって，求める確率は，$1-\dfrac{3}{36}=\dfrac{11}{12}$。

5　(1)　直線mの式に，$y=0$を代入すると，$0=-x+9$，$x=9$だから，C(9，0)。よって，点Cを通り，傾きが$-\dfrac{5}{2}$である直線nの式は，$y=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{45}{2}$。直線$\ell$，$m$の式を連立方程式として解いて，A(3，6)。直線$\ell$，$n$の式を連立方程式として解いて，B(5，10)。よって，$\triangle ABC=\triangle OBC-\triangle OAC=\dfrac{1}{2}\times9\times10-\dfrac{1}{2}\times9\times6=18(cm^2)$。

(2)　直線nの式に，$y=\dfrac{27}{4}$を代入すると，$\dfrac{27}{4}=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{45}{2}$，$x=\dfrac{63}{10}$だから，$R\left(\dfrac{63}{10},\ \dfrac{27}{4}\right)$。
PR＝QRより，点Rは辺PQの垂直二等分線上にあり，辺PQはy軸に平行だから，辺PQの中点のy座標は点Rのy座標に等しい。点Pのx座標をtとすると，$P(t,\ 2t)$，$Q(t,\ -t+9)$だから，辺PQの中点のy座標より，
$\dfrac{2t+(-t+9)}{2}=\dfrac{27}{4}$，$t=\dfrac{9}{2}$。よって，$\triangle PQR=\dfrac{1}{2}\times\left\{2\times\dfrac{9}{2}-\left(-\dfrac{9}{2}+9\right)\right\}\times\left(\dfrac{63}{10}-\dfrac{9}{2}\right)=\dfrac{81}{20}(cm^2)$。

6　(1)　この四面体を，底面が△PHRで高さが線分QDの三角錐Q-PHRとみると，$DP=8-3=5$(cm)より，
体積は，$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times3\times5\right)\times3=\dfrac{15}{2}(cm^3)$。

(2)　△HDQ≡△BCPより，HQ＝BP。△HDP≡△BAQより，HP＝BQ。また，PQ＝QP。
これより，3組の辺がそれぞれ等しいから，△HPQ≡△BQP。
$\triangle BQP=\triangle BPD+\triangle BQD-\triangle PDQ=\dfrac{1}{2}\times5\times8+\dfrac{1}{2}\times3\times8-\dfrac{1}{2}\times5\times3=\dfrac{49}{2}(cm^2)$。
よって，$\triangle HPQ=\triangle BQP=\dfrac{49}{2}cm^2$。
求める距離を$x$cmとすると，これは4点H，P，Q，Rを頂点とする四面体を，底面が△HPQの三角錐R-HPQとみたときの高さだから，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{49}{2}\times x=\dfrac{15}{2}$，$x=\dfrac{45}{49}$。

(3)　AD//FGより，△QFG＝△DFG。4点Q，D，F，Gは同一平面上にあるから，4点F，G，P，Qを頂点とする四面体(三角錐P-QFG)の体積は，三角錐P-DFGの体積と等しい。三角錐P-DFGは底面が△DPGで高さが線分FGの三角錐F-DPGとみることもできる。よって，求める体積は，$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times5\times8\right)\times8=\dfrac{160}{3}(cm^3)$。