数　学

1　小問集合（20点）

次の $\boxed{}$ を正しくうめよ。ただし，解答欄には答えのみを記入せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ を計算して簡単にすると，$\boxed{(ア)}$ となる。

(2) x の2次方程式 $3x^2+ax+a+3=0$（a は定数）が $x=2$ を解にもつとき，$a=\boxed{(イ)}$ であり，他の解は $x=\boxed{(ウ)}$ である。

(3) 頂点が点 (2, 6) で，点 (1, 4) を通る放物線をグラフにもつ2次関数は $y=\boxed{(エ)}$ である。

(4) ある印刷所には，1分間に80枚のチラシを印刷できる印刷機Aが40台ある。この印刷所で1分間に印刷できる枚数を増やすために，40台の印刷機Aのうち，x 台を1分間に95枚のチラシを印刷できる印刷機Bに交換することにした。交換した後に，この印刷所で1分間に印刷できるチラシの枚数を x を用いて表すと $\boxed{(オ)}$（枚）である。また，このとき，1分間に印刷できるチラシの枚数が，交換する前の1分間に印刷できるチラシの枚数の1.1倍以上になるような x の最小値は $\boxed{(カ)}$ である。

解答・配点

(1)(ア) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　（5点）

(2)(イ) -5　（2点）

(ウ) $-\dfrac{1}{3}$　（3点）

(3)(エ) $-2(x-2)^2+6$　（5点）

(4)(オ) $15x+3200$　（2点）

(カ) 22　（3点）

解法

(1)

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{2\sqrt{7}}{7-3}$$
$$=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

◀通分することで分母をまとめて有理化することができる。

(2)

$3x^2+ax+a+3=0$ の解の1つが $x=2$ であるから

$3\times2^2+2a+a+3=0$

$3a+15=0$

$a=-5$

このとき，もとの 2 次方程式は

$3x^2-5x-2=0$

$(x-2)(3x+1)=0$

$x=2,\ -\dfrac{1}{3}$

よって，他の解は　$x=-\dfrac{1}{3}$

◀方程式に $x=2$ を代入する。

◀たすき掛けを利用する。
$acx^2+(ad+bc)x+bd$
$=(ax+b)(cx+d)$

$$\begin{array}{ccccc} a & \times & b & \longrightarrow & bc \\ c & & d & \longrightarrow & ad \\ \hline ac & & bd & & ad+bc \end{array}$$

(3)

グラフの頂点が点 (2, 6) であるから，この 2 次関数は

$y=a(x-2)^2+6\ \ (a\neq0)$

と表される。

グラフが点 (1, 4) を通るから

$4=a\times(-1)^2+6$

$a=-2$ （$a\neq0$ に適する）

よって，求める 2 次関数は

$y=-2(x-2)^2+6$

◀グラフの頂点が点 $(p,\ q)$ であるような 2 次関数は
$\boldsymbol{y=a(x-p)^2+q\ \ (a\neq0)}$
の形で表される。

(4)

40 台の印刷機 A のうち x 台を印刷機 B に交換したとき，残りの印刷機 A は $(40-x)$ 台であるから，この印刷所で 1 分間に印刷できるチラシの枚数は

$80(40-x)+95x=15x+3200$ (枚)

この枚数が，交換する前に 1 分間に印刷できる枚数の 1.1 倍以上であるとき

$15x+3200\geqq80\times40\times1.1$

$15x+3200\geqq3520$

$15x\geqq320$

$x\geqq\dfrac{64}{3}=21.3\cdots$

これを満たす最小の整数は　$x=22$

◀交換する前に 1 分間に印刷できる枚数は
80×40 (枚)

2 ［1］数と式 (10 点)

x の方程式 $|x+3|=2a+3$ ……① がある。ただし，a は正の定数とする。

(1) 方程式①の 2 つの解を求めよ。

(2) 方程式①の 2 つの解の積が -16 であるとき，a の値を求めよ。

配点

(1) 5 点　　(2) 5 点

解答

(1)

$|x+3|=2a+3$ ……………………………………………………①

$a>0$ より，$2a+3>0$ であるから，①は

$x+3=\pm(2a+3)$

$x+3=2a+3$ のとき　$x=2a$

$x+3=-(2a+3)$ のとき　$x=-2a-6$

よって，①の解は

$x=2a,\ -2a-6$

答　$x=2a;\ -2a-6$

◀$c>0$ のとき
$|\boldsymbol{x}|=\boldsymbol{c}\Longleftrightarrow \boldsymbol{x}=\pm\boldsymbol{c}$

完答への道のり	
	A 絶対値記号を外すことができた。
	B 答えを求めることができた。

(2)

①の 2 つの解の積が -16 であるとき

$2a(-2a-6)=-16$

$a(a+3)=4$

◀両辺を -4 で割る。

$a^2+3a-4=0$

$(a+4)(a-1)=0$

$a>0$ より　$a=1$

答　$a=1$

完答への道のり	
	A a についての 2 次方程式を立てることができた。
	B 2 次方程式の解を求めるために，因数分解することができた。
	C $a>0$ に注意して，答えを求めることができた。

2 ［2］２次関数（10 点）

2つの2次不等式 $x^2-8x+12<0$ ……①，$x^2+(3-a)x-3a>0$ ……② がある。ただし，a は定数とする。

(i) 不等式①の解は $b=\boxed{(ア)}$，$c=\boxed{(イ)}$ として，次の $\boxed{(ウ)}$ の形で表される。

$\boxed{(ア)}$，$\boxed{(イ)}$ にあてはまる数を答えよ。また，$\boxed{(ウ)}$ にあてはまるものを次の **1**，**2** のうちから一つ選べ。

1 $b<x<c$　　**2** $x<b$，$c<x$

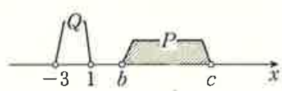
(ii) 集合 P，Q を，

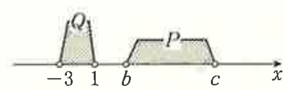
$P=\{x|x^2-8x+12<0,\ x$ は実数$\}$，$Q=\{x|x^2+(3-a)x-3a>0,\ x$ は実数$\}$ とする。

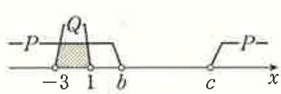
(A) $a=1$ とする。集合 P，Q を数直線上に表し，和集合 $P\cup Q$ を斜線の部分で表しているものは $\boxed{(エ)}$ である。

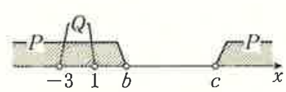
(B) $a=1$ とする。集合 P，Q を数直線上に表し，共通部分 $P\cap Q$ を斜線の部分で表しているものは $\boxed{(オ)}$ である。

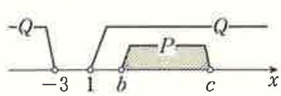
$\boxed{(エ)}$，$\boxed{(オ)}$ については，最も適当なものを次の **1**～**8** のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

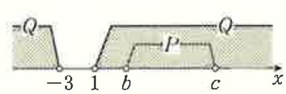
1


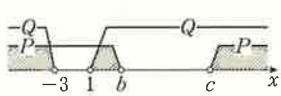
2


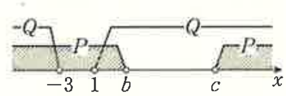
3


4


5


6


7


8


(iii) $a\neq-3$ とする。不等式①，②を同時に満たす x が存在しないような a の値の範囲を求めよ。

配点
10 点

解答
(i)

$x^2-8x+12<0$ ……………………………………………①
$(x-2)(x-6)<0$
$2<x<6$

◀ 2次不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ $(\alpha<\beta)$ の解は $\alpha<x<\beta$

A□ ①の解は，$b=2$，$c=6$ として，**1**　$b<x<c$ の形で表される。

答　(ア)　2，(イ)　6，(ウ)　**1**

(ii)

$$P=\{x|x^2-8x+12<0\}$$
$$=\{x|2<x<6\}$$

$a=1$ のとき，②は　$x^2+2x-3>0$

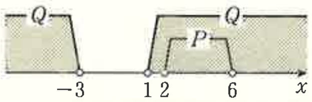
$(x+3)(x-1)>0$

$x<-3$，$1<x$

よって　$Q=\{x|x<-3,\ 1<x\}$

(A)　$P\cup Q$ は，次の斜線部分である。

◀$P\cup Q$ は，P と Q の和集合，すなわち，P と Q の少なくとも一方に属する要素全体の集合である。

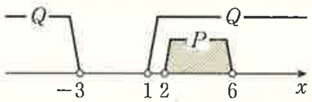


B□ **1**～**8**のうち，正しいものは　**6**

答　(エ)　**6**

(B)　$P\cap Q$ は，次の斜線部分である。

◀$P\cap Q$ は，P と Q の共通部分，すなわち，P と Q のいずれにも属する要素全体の集合である。



C□ **1**～**8**のうち，正しいものは　**5**

答　(オ)　**5**

(iii)　②より　$(x+3)(x-a)>0$ ……………………………………②′

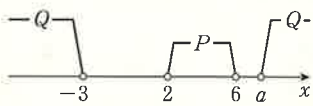
D□ (Ⅰ)　$a>-3$ のとき

◀$P\cap Q=\varnothing$ となる場合を調べる。

②′ の解は　$x<-3$，$a<x$

①，②を同時に満たす x が存在しないような a の値の範囲は　$a\geqq 6$

◀$a=6$ のときも適することに注意する。



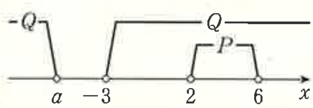
$a>-3$ との共通範囲を求めると

E□ $a\geqq 6$

F□ (Ⅱ)　$a<-3$ のとき

②′ の解は　$x<a$，$-3<x$

①，②を同時に満たす x は常に存在するから，不適。



G□ (Ⅰ)，(Ⅱ)より，求める a の値の範囲は

$a\geqq 6$

答　$a\geqq 6$

完答への道のり	
	A 2次不等式①の解を求めることができた。
	B **6**を選択することができた。
	C **5**を選択することができた。
	D **F** a と -3 の大小関係に注目して場合分けをすることができた。
	E **G** それぞれの場合において，不等式①，②を同時に満たす x が存在しないような a の値の範囲を数直線を用いて求めることができた。

3　2次関数（20点）

2次関数 $f(x)=ax^2-4ax+5a+1$ がある。ただし，a は0でない定数とする。

(1)　$a>0$ とする。$f(x)$ の最小値が $6a^2$ であるとき，a の値を求めよ。

(2)　$a<0$ とする。$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $0\leqq x\leqq 4$ の部分と共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ。

(3)　$a<4$ とする。$a\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とするとき，$M-m$ を a を用いて表せ。

配点

(1)　5点　　(2)　6点　　(3)　9点

解答

(1)

$$\begin{aligned} f(x)&=ax^2-4ax+5a+1\\ &=a(x^2-4x)+5a+1\\ &=a\{(x-2)^2-4\}+5a+1\\ &=a(x-2)^2+a+1 \end{aligned}$$

$a>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。

よって，$f(x)$ は $x=2$ のとき最小値 $a+1$ をとる。

この値が $6a^2$ であるとき

$6a^2=a+1$

$6a^2-a-1=0$

$(2a-1)(3a+1)=0$

$a>0$ より　$a=\dfrac{1}{2}$

答　$a=\dfrac{1}{2}$

◀ $y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，頂点で $f(x)$ は最小値をとる。

完答への道のり

- A　$f(x)$ を平方完成することができた。
- B　$a>0$ であることから，$x=2$ のとき最小値をとることに気づくことができた。
- C　a についての2次方程式を立てることができた。
- D　$a>0$ に注意して，答えを求めることができた。

(2)

$f(x)=a(x-2)^2+a+1$

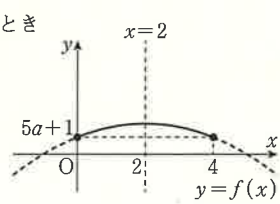
$a<0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは直線 $x=2$ を軸とする上に凸の放物線である。これが x 軸の $0\leqq x\leqq 4$ の部分と共有点をもたないのは，次の(i)，(ii)の場合である。

(i)　$0\leqq x\leqq 4$ において常に $f(x)>0$ であるとき

$0\leqq x\leqq 4$ において，$f(x)$ は $x=0$ および $x=4$ で最小となり，最小値は

$f(0)=5a+1$

であるから



◀グラフは直線 $x=2$ について対称であるから　$f(0)=f(4)$

B $5a+1>0$

$a>-\dfrac{1}{5}$

$a<0$ との共通範囲は

C $-\dfrac{1}{5}<a<0$

D (ii) $0 \leqq x \leqq 4$ において常に $f(x)<0$ であるとき

$0 \leqq x \leqq 4$ において，$f(x)$ は $x=2$ で最大となり，最大値は

$f(2)=a+1$

であるから

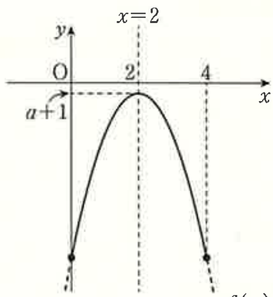
E $a+1<0$

$a<-1$

F これは $a<0$ を満たすから，適する。

(i)，(ii)より，求める a の値の範囲は

$a<-1,\ -\dfrac{1}{5}<a<0$



◀$0 \leqq x \leqq 4$ において常に $f(x)>0$
$\iff 0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最小値が正

◀$0 \leqq x \leqq 4$ において常に $f(x)<0$
$\iff 0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最大値が負

答 $a<-1,\ -\dfrac{1}{5}<a<0$

完答への道のり	
	A **D** 条件を満たす2つの場合に分けて考えることができた。
	B **E** それぞれの場合において，x 軸の $0 \leqq x \leqq 4$ の部分と共有点をもたないような条件を，a の不等式で表すことができた。
	C **F** それぞれの場合において，答えを求めることができた。

(3)

A (i) $2<a<4$ のとき

$a \leqq x \leqq 4$ において，$f(x)$ は $x=4$ で

B 最大，$x=a$ で最小となるから

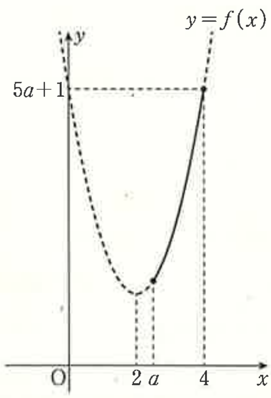
$M=f(4)=5a+1$

C $m=f(a)=a^3-4a^2+5a+1$

よって

$M-m=(5a+1)-(a^3-4a^2+5a+1)$

D $=-a^3+4a^2$



◀定義域に軸 $x=2$ を含むかどうか，また，グラフが下に凸か上に凸かで場合分けを行う。

◀$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，軸 $x=2$ が定義域の左外にある。

E (ii) $0<a \leqq 2$ のとき

$a \leqq x \leqq 4$ において，$f(x)$ は $x=4$ で

F 最大，$x=2$ で最小となるから

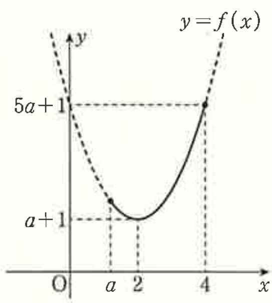
$M=f(4)=5a+1$

G $m=f(2)=a+1$

よって

$M-m=(5a+1)-(a+1)$

H $=4a$



◀$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，軸 $x=2$ が定義域内の中央より左側にある。

I □ J □ K □ L □

(iii) $a<0$ のとき

$a \leqq x \leqq 4$ において，$f(x)$ は $x=2$ で最大，$x=a$ で最小となるから

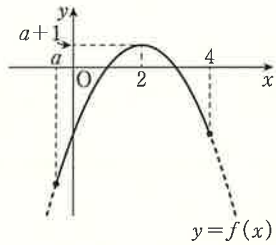
$$M=f(2)=a+1$$

$$m=f(a)=a^3-4a^2+5a+1$$

よって

$$M-m=(a+1)-(a^3-4a^2+5a+1)$$

$$=-a^3+4a^2-4a$$



◀グラフは上に凸であることに注意する。

◀$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であり，軸 $x=2$ が定義域内の中央より右側にある。

(i)，(ii)，(iii)より

$2<a<4$ のとき　$M-m=-a^3+4a^2$

$0<a \leqq 2$ のとき　$M-m=4a$

$a<0$ のとき　$M-m=-a^3+4a^2-4a$

答　$2<a<4$ のとき　$M-m=-a^3+4a^2$

$0<a \leqq 2$ のとき　$M-m=4a$

$a<0$ のとき　$M-m=-a^3+4a^2-4a$

完答への道のり	
	A E I 最大値・最小値をとる x の値により，異なる 3 つの場合に分けて考えることができた。
	B F J それぞれの場合において，最大値・最小値をとる x の値を求めることができた。
	C G K それぞれの場合において，M，m の値を a を用いて表すことができた。
	D H L それぞれの場合において，$M-m$ の値を a を用いて表すことができた。

4 図形と計量（20 点）

四角形 ABCD があり，$\angle ABC+\angle ADC=180°$ である。対角線 AC を引き，△ABC をつくる。△ABC は鋭角三角形であり，BC＝5，$\sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{6}}{7}$，$\sin\angle ABC=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ である。

(1) 辺 AC の長さを求めよ。

(2) $\cos\angle ADC$ の値を求めよ。また，CD：DA＝5：4 であるとき，辺 CD の長さを求めよ。

(3) 辺 AB の長さを求めよ。また，CD：DA＝5：4 であるとき，$\cos\angle BAD$ の値と線分 BD の長さを求めよ。

配点

(1)　5 点　　(2)　7 点　　(3)　8 点

解答

(1)

A □

△ABC において，正弦定理により

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$$

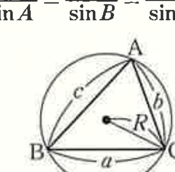
$$AC=BC\times\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BAC}$$

$$=5\times\frac{2\sqrt{6}}{5}\div\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

◀**正弦定理**

△ABC において，外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



$= 7$

答 7

完答への道のり

Ⓐ 正弦定理を用いて辺 AC の長さに関する式を立てることができた。

Ⓑ 答えを求めることができた。

(2)

$\cos^2\angle ABC = 1 - \sin^2\angle ABC$

$= 1 - \left(\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{25}$

$\angle ABC$ は鋭角であるから

$\cos\angle ABC > 0$

よって　$\cos\angle ABC = \sqrt{\dfrac{1}{25}} = \dfrac{1}{5}$

$\angle ABC + \angle ADC = 180°$ より

$\angle ADC = 180° - \angle ABC$

であるから

$\cos\angle ADC = \cos(180° - \angle ABC)$

$= -\cos\angle ABC$

$= -\dfrac{1}{5}$

次に，$CD : DA = 5 : 4$ より

$CD = 5x$，$DA = 4x$ とおくと

$\triangle ACD$ において，余弦定理により

$7^2 = (5x)^2 + (4x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 4x\cos\angle ADC$

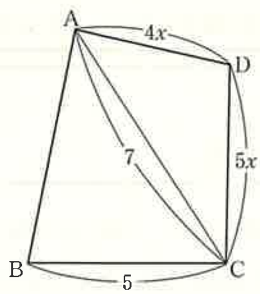
$49 = 25x^2 + 16x^2 - 40x^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right)$

$49x^2 = 49$

$x^2 = 1$

$x > 0$ より　$x = 1$

よって　$CD = 5x = 5$



答　$\cos\angle ADC = -\dfrac{1}{5}$，$CD = 5$

◀**三角比の相互関係**

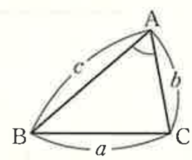
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

◀ $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

◀**余弦定理**

$\triangle ABC$ において

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$



完答への道のり

Ⓐ 三角比の相互関係と，$\angle ABC$ が鋭角であることから，$\cos\angle ABC$ の値を求めることができた。

Ⓑ $\angle ADC = 180° - \angle ABC$ であることから，$\cos\angle ADC$ の値を求めることができた。

Ⓒ $\triangle ACD$ において，余弦定理を用いて，辺 CD の長さに関する式を立てることができた。

Ⓓ 辺 CD の長さを求めることができた。

(3)

$AB = y$ とする。

$\triangle ABC$ において，余弦定理により

$7^2 = y^2 + 5^2 - 2y \cdot 5\cos\angle ABC$

$49 = y^2 + 25 - 10y \cdot \dfrac{1}{5}$

$y^2 - 2y - 24 = 0$

$(y-6)(y+4) = 0$

$y > 0$ より　$y = 6$

したがって　$AB = 6$

◀ $\cos\angle ABC$ の値がわかっているから，これを利用して余弦定理を用いる。

次に，四角形 ABCD の内角について

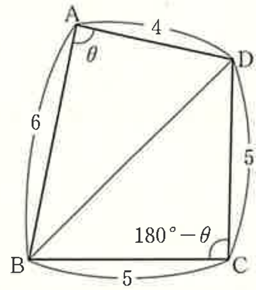
$\angle BAD+\angle BCD$

$=360^\circ-(\angle ABC+\angle ADC)$

$=360^\circ-180^\circ=180^\circ$

よって，$\angle BAD=\theta$ とすると

$\angle BCD=180^\circ-\theta$



△ABD において，余弦定理により

C☐ $BD^2=6^2+4^2-2\cdot6\cdot4\cos\theta$

$=52-48\cos\theta$ ……………① ◀ BD^2 を $\cos\theta$ を用いて 2 通りに表す。

△BCD において，余弦定理により

D☐ $BD^2=5^2+5^2-2\cdot5\cdot5\cos(180^\circ-\theta)$ ◀ $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

$=50+50\cos\theta$ ……………②

①，②より　$52-48\cos\theta=50+50\cos\theta$

$98\cos\theta=2$

E☐ $\cos\theta=\dfrac{2}{98}=\dfrac{1}{49}$

②より　$BD^2=50+50\cdot\dfrac{1}{49}=\dfrac{2500}{49}$

F☐ $BD>0$ より　$BD=\dfrac{50}{7}$

答　$AB=6$，$\cos\angle BAD=\dfrac{1}{49}$，$BD=\dfrac{50}{7}$

完答への道のり

- A 余弦定理を用いて，辺 AB の長さに関する式を立てることができた。
- B 辺 AB の長さを求めることができた。
- C △ABD において，余弦定理を用いて，線分 BD の長さに関する式を立てることができた。
- D △BCD において，余弦定理を用いて，線分 BD の長さに関する式を立てることができた。
- E $\cos\angle BAD$ の値を求めることができた。
- F 線分 BD の長さを求めることができた。