高校数学　三角比　基礎～演習

三角比の直角三角形による定義と性質

104 基本例題 **特別な角の三角比**　基本|標準|発展

(1) θ が次の角度のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(ア) $\theta=30^\circ$　　(イ) $\theta=45^\circ$　　(ウ) $\theta=60^\circ$

(2) 次の式の値を求めよ。

(ア) $\cos30^\circ\tan30^\circ-\sin45^\circ\cos45^\circ$　　(イ) $(\sin60^\circ-\cos60^\circ)^2$

108 基本例題 **三角比の相互関係**　基本|標準|発展

θ は鋭角であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\sin\theta=\frac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\tan\theta=2$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ。

109 標準例題 **$90^\circ-\theta$(余角)の三角比**　基本|標準|発展

(1) 次の三角比を，0° から 45° までの角の三角比で表せ。

(ア) $\sin64^\circ$　　(イ) $\cos57^\circ$　　(ウ) $\tan78^\circ$

(2) $\triangle$ABC の内角の大きさをそれぞれ A，B，C で表すとき，

$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}$ の値を求めよ。

類題 104 次の式の値を求めよ。

(1) $\sin30^\circ+\cos30^\circ$　　(2) $(\tan45^\circ+\tan60^\circ)^2$　　(3) $\frac{\cos45^\circ}{\sin30^\circ}+\frac{\sin45^\circ}{\cos60^\circ}$

類題 108 θ は鋭角であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\cos\theta=\frac{1}{4}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\tan\theta=\frac{1}{2}$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ。

類題 109-1 次の三角比を，0° から 45° までの角の三角比で表せ。

(1) $\sin75^\circ$　　(2) $\cos80^\circ$　　(3) $\tan68^\circ$

類題 109-2 $\triangle$ABC の内角の大きさをそれぞれ A，B，C で表すとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B+C}{2}$　　(2) $\frac{1}{\tan^2\frac{B+C}{2}}-\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}$

三角比の拡張による定義と性質

110 標準例題 鈍角の三角比・三角比のとり得る値の範囲　基本|標準|発展

(1) $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\tan 120^\circ$ の値を求めよ。

(2) $30^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ とするとき，$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ のとり得る値の範囲を求めよ。

111 基本例題 鋭角の三角比に導く　基本|標準|発展

(2) $\sin 15^\circ = a$ として，次の三角比の値を a で表せ。

(ア) $\cos 15^\circ$　(イ) $\cos 105^\circ$　(ウ) $\cos 165^\circ$　(エ) $\tan 105^\circ$

112 標準例題 三角比の式の値 [1]　基本|標準|発展

次の式の値を求めよ。

(1) $\sin 20^\circ \cos 110^\circ + \sin 70^\circ \cos 160^\circ$

(2) $\tan 25^\circ \tan 65^\circ \tan 115^\circ \tan 155^\circ$

類題 110-1 $\sin 150^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\tan 150^\circ$ の値を求めよ。

類題 110-2 $60^\circ \leqq \theta \leqq 135^\circ$ とするとき，$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ のとり得る値の範囲を求めよ。

類題 111-2 $\cos 35^\circ = a$ として，次の三角比の値を a で表せ。

(1) $\sin 35^\circ$　(2) $\sin 125^\circ$　(3) $\sin 145^\circ$　(4) $\tan 125^\circ$

類題 112 次の式の値を求めよ。

(1) $\cos(90^\circ - \theta)\sin(180^\circ - \theta) - \sin(90^\circ + \theta)\cos(180^\circ - \theta)$

(2) $(\tan 25^\circ + \tan 65^\circ)^2 - (\tan 25^\circ + \tan 115^\circ)^2$

113 標準例題　拡張された三角比の相互関係

基本｜標準｜発展

(1)　θ が鈍角で，$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ および $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$ および $\tan\theta$ の値を求めよ。

(3)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で，$\tan\theta=-2$ のとき，$\sin\theta$ および $\cos\theta$ の値を求めよ。

114 発展例題　三角比の式の値 2

基本｜標準｜発展

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\cos\theta-\sin\theta$　　(3)　$\cos\theta$

類題 113　(1)　θ が鈍角で，$\sin\theta=\dfrac{3}{4}$ のとき，$\cos\theta$ および $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で，$\tan\theta=-3$ のとき，$\sin\theta$ および $\cos\theta$ の値を求めよ。

類題 114　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$　　(3)　$\sin\theta+\cos\theta$

〔三角比の相互関係〕

1　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ （基本等式）

2　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　3　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

〔$90^\circ-\theta$（余角）の公式〕

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$

$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$

$\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$

$\tan(90^\circ+\theta)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

〔$180^\circ-\theta$（補角）の公式〕

$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$

三角比の方程式・不等式・最大最小値

116 基本例題 簡単な三角方程式 [1] 基本 標準 発展

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　(3) $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

117 標準例題 簡単な三角方程式 [2] 基本 標準 発展

(1) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，方程式 $2\cos^2\theta + 5\sin\theta - 4 = 0$ を解け。

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$ を解け。

118 標準例題 簡単な三角不等式 基本 標準 発展

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin\theta \geqq \dfrac{1}{2}$　(2) $\cos\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\tan\theta \geqq 1$

119 発展例題 三角比を含む式の最大・最小 基本 標準 発展

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$y = \sin^2\theta - \cos\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

類題 116 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $2\cos\theta - \sqrt{3} = 0$　(3) $\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

類題 117 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $2\sin^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$

(2) $2\cos^2\theta - 7\sin\theta + 2 = 0$

類題 118 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\cos\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$　(3) $\tan\theta \leqq \sqrt{3}$

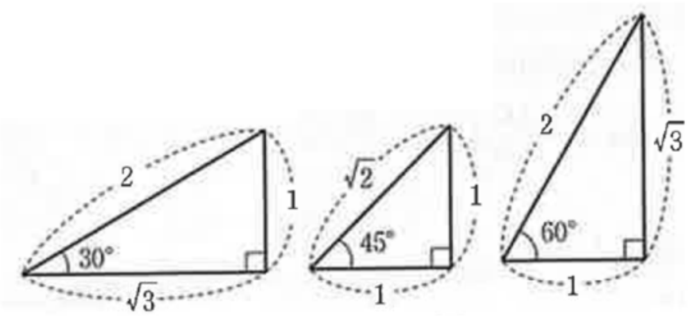
類題 119-1 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$y = \cos^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta + 1$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

類題 119-2 $60^\circ \leqq \theta \leqq 135^\circ$ のとき，$y = \cos^2\theta + \sin\theta - 1$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

●解答・解説

三角比の直角三角形による定義と性質

104 基本例題 30°, 45°, 60° の三角比の値は，直角三角形の辺の比から求められる。



(1) 上の図と三角比の定義により

(ア) $\sin30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ➡❶ …答

(イ) $\sin45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan45^\circ=1$ …答

(ウ) $\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos60^\circ=\frac{1}{2}$, $\tan60^\circ=\sqrt{3}$ …答

(2) (ア) 与式 $=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$

$=0$ …答

(イ) 与式 $=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2$

$=\frac{3}{4}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ …答

類題 104 (1) 与式 $=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(2) 与式 $=(1+\sqrt{3})^2=1+2\sqrt{3}+3$

$=4+2\sqrt{3}$

(3) 与式 $=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}$

108 基本例題

(1) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ ➡❶ $=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

$\cos\theta>0$ ➡❷ であるから $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$ …答

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から $\tan\theta=\frac{2}{3}\div\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ …答

(2) $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ から

$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+2^2}=\frac{1}{5}$

$\cos\theta>0$ であるから $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ …答

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から

$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta=2\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ …答

類題 108 (1) $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$

$\sin\theta>0$ であるから $\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{15}}{4}\div\frac{1}{4}=\sqrt{15}$

(2) $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ から

$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$\cos\theta>0$ であるから $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から

$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

109 標準例題

(1) (ア) $\sin 64^\circ=\sin(90^\circ-26^\circ)=\mathbf{\cos 26^\circ}$ …答

(イ) $\cos 57^\circ=\cos(90^\circ-33^\circ)=\mathbf{\sin 33^\circ}$ …答

(ウ) $\tan 78^\circ=\tan(90^\circ-12^\circ)=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{\tan 12^\circ}}$ …答

(2) $A+B+C=180^\circ$ より　$B+C=180^\circ-A$

ゆえに

与式$=\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{180^\circ-A}{2}+\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{180^\circ-A}{2}$

$=\sin\dfrac{A}{2}\cos\left(90^\circ-\dfrac{A}{2}\right)+\cos\dfrac{A}{2}\sin\left(90^\circ-\dfrac{A}{2}\right)$

$=\sin^2\dfrac{A}{2}$ →❷ $+\cos^2\dfrac{A}{2}$

$=\mathbf{1}$ →❸ …答

類題 109-1 (1) $\sin 75^\circ=\sin(90^\circ-15^\circ)=\mathbf{\cos 15^\circ}$

(2) $\cos 80^\circ=\cos(90^\circ-10^\circ)=\mathbf{\sin 10^\circ}$

(3) $\tan 68^\circ=\tan(90^\circ-22^\circ)=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{\tan 22^\circ}}$

類題 109-2 (1) $A+B+C=180^\circ$ より

$B+C=180^\circ-A$

よって　$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B+C}{2}=\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{180^\circ-A}{2}$

$=\tan\dfrac{A}{2}\tan\left(90^\circ-\dfrac{A}{2}\right)=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\dfrac{1}{\tan\dfrac{A}{2}}=\mathbf{1}$

(2) $A+B+C=180^\circ$ より　$B+C=180^\circ-A$

よって　$\tan^2\dfrac{B+C}{2}=\tan^2\dfrac{180^\circ-A}{2}$

$=\tan^2\left(90^\circ-\dfrac{A}{2}\right)=\dfrac{1}{\tan^2\dfrac{A}{2}}$

したがって

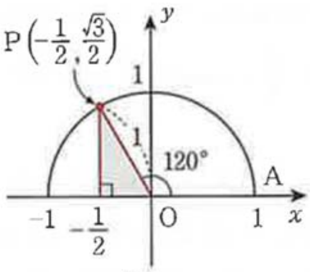
$\dfrac{1}{\tan^2\dfrac{B+C}{2}}-\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{A}{2}}$

$\underbrace{=\tan^2\dfrac{A}{2}-\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{A}{2}}}=\mathbf{-1}$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\tan^2\theta-\dfrac{1}{\cos^2\theta}=-1$

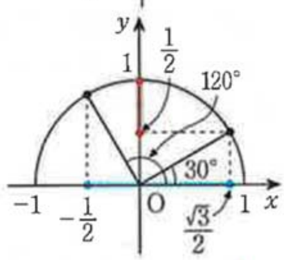
110 標準例題

(1) 図のように，単位円周上に点Pをとり，$\angle AOP=120^\circ$ とすると，点Pの座標は $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ →❶ となる。



$\sin 120^\circ=y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ …答

$\cos 120^\circ=x=-\dfrac{1}{2}$ …答



$\tan 120^\circ=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\div\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=-\sqrt{3}$ …答

(2) $30^\circ\leqq\theta\leqq120^\circ$ のとき，図から

$\sin 30^\circ\leqq\sin\theta\leqq\sin 90^\circ$ →❷

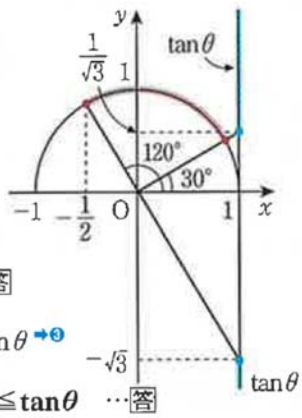
よって　$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\leqq\mathbf{\sin\theta}\leqq\mathbf{1}$ …答

$\cos 120^\circ\leqq\cos\theta\leqq\cos 30^\circ$

ゆえに　$\mathbf{-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ …答

$\tan\theta\leqq\tan 120^\circ,\ \tan 30^\circ\leqq\tan\theta$ →❸

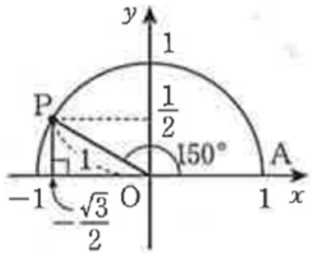
したがって　$\mathbf{\tan\theta\leqq-\sqrt{3},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq\tan\theta}$ …答



類題 110-1 A(1, 0) として，単位円周上に ∠AOP=150° となる点 P をとる。

このとき

$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$



となるから

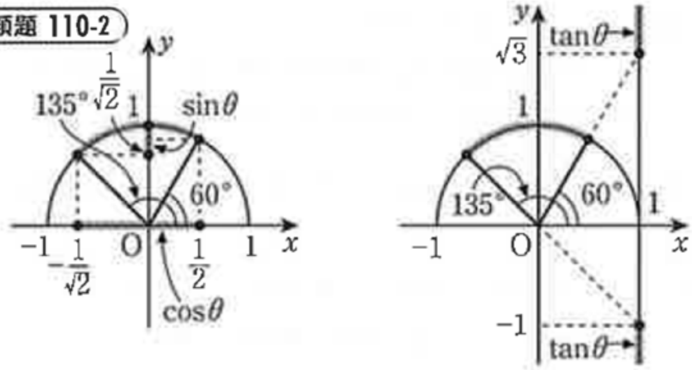
$\sin150° = y = \mathbf{\frac{1}{2}}$

$\cos150° = x = -\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\tan150° = \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \div \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -\mathbf{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

類題 110-2



図のようになるから

$\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\theta \leqq 1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \cos\theta \leqq \frac{1}{2},}$

$\mathbf{\tan\theta \leqq -1,\ \sqrt{3} \leqq \tan\theta}$

111 基本例題

(2) (ア) $\cos^2 15° = 1 - \sin^2 15° \overset{➜❸}{=} 1 - a^2$

$\cos15° > 0$ であるから　$\cos15° = \sqrt{\mathbf{1 - a^2}}$　…答

(イ) $\cos105° = \cos(90° + 15°)$

$= -\sin15° = -\mathbf{a}$　…答

(ウ) $\cos165° = \cos(180° - 15°)$

$= -\cos15° = -\sqrt{\mathbf{1 - a^2}}$　…答

(エ) $\tan105° = \tan(90° + 15°)$

$= -\frac{1}{\tan15°} = -\frac{\cos15°}{\sin15°}$

$= -\mathbf{\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}}$　…答

類題 111-2 (1) $\sin^2 35° + \cos^2 35° = 1$ より

$\sin^2 35° = 1 - \cos^2 35° = 1 - a^2$

$\sin35° > 0$ であるから　$\sin35° = \sqrt{\mathbf{1 - a^2}}$

(2) $\sin125° = \sin(90° + 35°) = \cos35° = \mathbf{a}$

(3) $\sin145° = \sin(180° - 35°) = \sin35° = \sqrt{\mathbf{1 - a^2}}$

(4) $\tan125° = \tan(90° + 35°) = -\frac{1}{\tan35°}$

$= -\frac{\cos35°}{\sin35°} = -\mathbf{\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}}$

112 標準例題

(1) $\cos110° = \cos(90° + 20°) = -\sin20°$

$\sin70° = \sin(90° - 20°) = \cos20°$

$\cos160° = \cos(180° - 20°) = -\cos20°$

よって

与式 $= \sin20°(-\sin20°) + \cos20°(-\cos20°)$

$= -\sin^2 20° - \cos^2 20°$

$= -(\sin^2 20° + \cos^2 20°)$ ➜❶

$= \mathbf{-1}$　…答

(2) $\tan65° = \tan(90° - 25°)$

$= \frac{1}{\tan25°}$

$\tan115° = \tan(90° + 25°)$

$= -\frac{1}{\tan25°}$

$\tan155° = \tan(180° - 25°)$

$= -\tan25°$

よって

与式 $= \tan25° \times \frac{1}{\tan25°} \times \left(-\frac{1}{\tan25°}\right) \times (-\tan25°)$

$= \mathbf{1}$　…答

類題 112 (1) $\cos(90°-\theta)\sin(180°-\theta)$
$-\sin(90°+\theta)\cos(180°-\theta)$
$=\sin\theta\cdot\sin\theta-\cos\theta\cdot(-\cos\theta)$
$=\sin^2\theta+\cos^2\theta$
$=\mathbf{1}$

(2) $\tan65°=\tan(90-25)°=\dfrac{1}{\tan25°}$,

$\tan115°=\tan(90+25)°=-\dfrac{1}{\tan25°}$ より

$(\tan25°+\tan65°)^2-(\tan25°+\tan115°)^2$
$=\left(\tan25°+\dfrac{1}{\tan25°}\right)^2-\left(\tan25°-\dfrac{1}{\tan25°}\right)^2$
$=\tan^2 25°+2\cdot\tan25°\cdot\dfrac{1}{\tan25°}+\dfrac{1}{\tan^2 25°}$
$-\left(\tan^2 25°-2\cdot\tan25°\cdot\dfrac{1}{\tan25°}+\dfrac{1}{\tan^2 25°}\right)$
$=4\cdot\tan25°\cdot\dfrac{1}{\tan25°}=\mathbf{4}$

113 標準例題

(1) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

θ は鈍角であるから，$\cos\theta<0$ より

$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{8}}{3}=-\dfrac{\mathbf{2\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$ …答

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}\div\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\dfrac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{4}}$ ➔❷ …答

(2) $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから，$\sin\theta\geqq0$ より　$\sin\theta=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$ …答

よって　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{4}{5}\div\dfrac{3}{5}=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$ …答

(3) $\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$ ➔❸ $=\dfrac{1}{1+(-2)^2}=\dfrac{1}{5}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ で，$\tan\theta=-2<0$ より，θ は鈍角であるから　$\cos\theta<0$

よって　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\mathbf{\sqrt{5}}}{\mathbf{5}}$ …答

$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$ ➔❹ $=-2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)=\dfrac{\mathbf{2\sqrt{5}}}{\mathbf{5}}$ …答

類題 113 (1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

θ は鈍角であるから，$\cos\theta<0$ より

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=-\dfrac{\mathbf{\sqrt{7}}}{\mathbf{4}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{3}{4}\div\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)=-\dfrac{3}{\sqrt{7}}=-\dfrac{\mathbf{3\sqrt{7}}}{\mathbf{7}}$

(2) $\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+(-3)^2}=\dfrac{1}{10}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ で，$\tan\theta=-3<0$ より，θ は鈍角であるから　$\cos\theta<0$

ゆえに　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}=-\dfrac{\mathbf{\sqrt{10}}}{\mathbf{10}}$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=(-3)\times\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)=\dfrac{\mathbf{3\sqrt{10}}}{\mathbf{10}}$

114 発展例題

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\dfrac{1}{4}$

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ ➔❶

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$ …答

(2) $(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$
$=1-2\cdot\left(-\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{7}{4}$

よって　$\cos\theta-\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

ここで，$0°\leqq\theta\leqq180°$ より　$\sin\theta\geqq0$

また，$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}<0$ であるから　$\cos\theta<0$ ➔❷

ゆえに，$\cos\theta-\sin\theta<0$ ➔❸ であるから

$\cos\theta-\sin\theta=-\dfrac{\mathbf{\sqrt{7}}}{\mathbf{2}}$ …答

(3) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\theta-\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ より

$2\cos\theta=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　ゆえに　$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{1-\sqrt{7}}}{\mathbf{4}}$ …答

類題 114 (1) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ より　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\dfrac{1}{9}$

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\mathbf{\dfrac{4}{9}}$

(2)　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\frac{4}{9}}=\mathbf{\frac{9}{4}}$$

(3)　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$$=1+2\cdot\frac{4}{9}=\frac{17}{9}$$

ここで，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\sin\theta\geqq0$

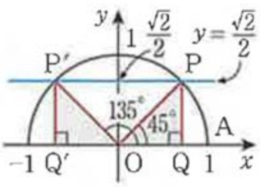
また，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}>0$ であるから　$\cos\theta>0$

ゆえに，$\sin\theta+\cos\theta>0$ であるから

$$\sin\theta+\cos\theta=\mathbf{\frac{\sqrt{17}}{3}}$$

116 基本例題

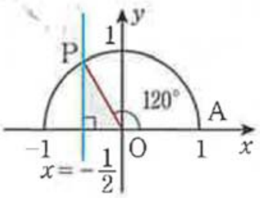
(1)　A(1, 0) として，単位円周上に，y 座標が $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である点をとると，2 点 P と P′ が決まる。➊



このとき，∠AOP と ∠AOP′ が求める角である。

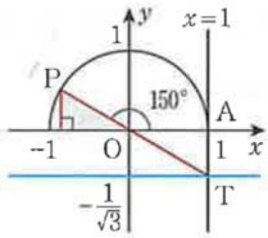
ゆえに　$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$ ➋，**135°**　…答

(2)　単位円周上に，x 座標が $-\dfrac{1}{2}$ である点をとると，点 P が決まる。➌



このとき，∠AOP が求める角である。ゆえに　$\boldsymbol{\theta=120^\circ}$　…答

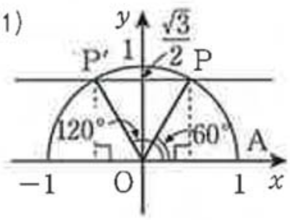
(3)　直線 $x=1$ 上に，y 座標が $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である点 T をとり，TO の延長が単位円(上半分)と交わる点をとると，点 P が決まる。



このとき，∠AOP が求める角である。ゆえに　$\boldsymbol{\theta=150^\circ}$　…答

類題 116 (1) A(1, 0) として，単位円周上に y 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である点をとると，2 点 P と P′ が決まる。∠AOP と ∠AOP′ が求める角である。ゆえに　$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$，**120°**

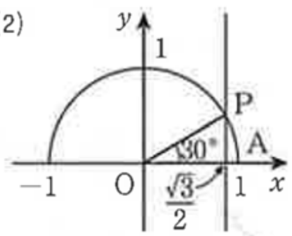
(1)



(2) $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

単位円周上に x 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である点をとると，点 P が決まる。∠AOP が求める角である。ゆえに　$\boldsymbol{\theta=30^\circ}$

(2)

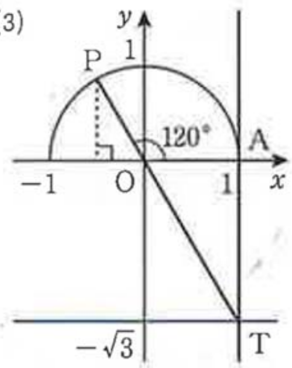


(3) $\tan\theta=-\sqrt{3}$

直線 $x=1$ 上に y 座標が $-\sqrt{3}$ である点 T をとり，TO と単位円周との交点をとると，点 P が決まる。∠AOP が求める角である。

ゆえに　$\boldsymbol{\theta=120^\circ}$

(3)



117 標準例題

(1)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから

$2(1-\sin^2\theta)+5\sin\theta-4=0$

$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2=0$ →❶

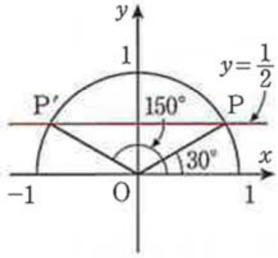
$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2)=0$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき，

$0\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから

$\sin\theta=2$ は適さない。

ゆえに　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$



$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ でこれを満たす θ は　$\boldsymbol{\theta=30^\circ,\ 150^\circ}$　…答

(2)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから

$2(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-1=0$

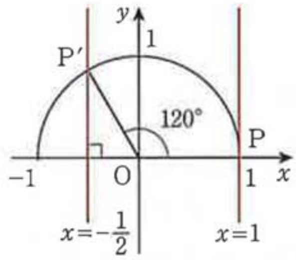
$2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$

$(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)=0$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき，

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2},\ 1$



$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき，

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は　$\theta=120^\circ$

$\cos\theta=1$ を満たす θ は　$\theta=0^\circ$

ゆえに，この方程式の解は　$\boldsymbol{\theta=0^\circ,\ 120^\circ}$　…答

類題 117 (1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

よって，与式は　$2(1-\cos^2\theta)-\cos\theta-1=0$

$2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)=0$

ゆえに　$2\cos\theta-1=0,\ \cos\theta+1=0$

よって　$\cos\theta=\dfrac{1}{2},\ -1$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ から　$\theta=60^\circ$

$\cos\theta=-1$ から　$\theta=180^\circ$

ゆえに　$\boldsymbol{\theta=60^\circ,\ 180^\circ}$

(2) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ より，与式は

$2(1-\sin^2\theta)-7\sin\theta+2=0$

$2\sin^2\theta+7\sin\theta-4=0$

$(\sin\theta+4)(2\sin\theta-1)=0$

ゆえに　$\sin\theta+4=0,\ 2\sin\theta-1=0$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき $0\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから，

$\sin\theta=-4$ は適さない。よって　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\boldsymbol{\theta=30^\circ,\ 150^\circ}$

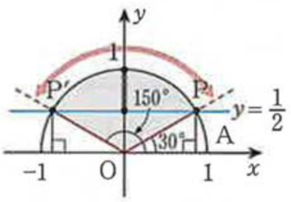
118 標準例題

(1)　A(1, 0) とし，単位円周上に，y 座標が $\dfrac{1}{2}$ である点をとると，2点 P, P′ が決まり，→❶

$\angle AOP=30^\circ$，$\angle AOP'=150^\circ$

である。

y 座標が $\dfrac{1}{2}$ 以上の点は，単位円周上の P と P′ の間にある。



ゆえに，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき，求める解は $\boldsymbol{30^\circ\leqq\theta\leqq150^\circ}$ …答

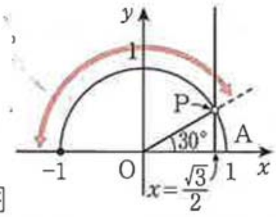
(2)　単位円周上に，x 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である点をとると，点 P が決まり，→❷ $\angle AOP=30^\circ$ である。

x 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より小さい点は

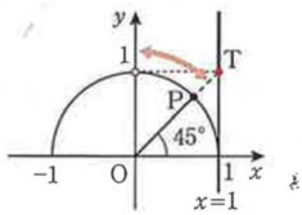
P と $(-1,\ 0)$ の間にある。

ゆえに，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき，

求める解は　$\boldsymbol{30^\circ<\theta\leqq180^\circ}$　…答



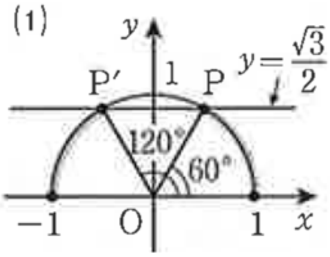
(3)　直線 $x=1$ 上に，y 座標が 1 である点 T をとり，TO が単位円と交わる点をとると，点 P が決まる。直線 $x=1$ 上で y 座標が 1 以上の点と O を結んだ直線が単位円と交わる点は P と (0, 1) の間にある。



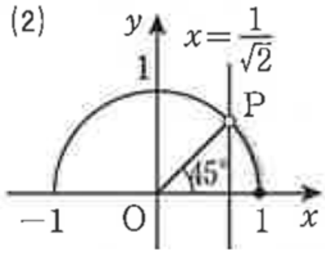
ゆえに $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき，求める解は $\boldsymbol{45^\circ\leqq\theta<90^\circ}$ →❸ …答

類題 118 (2) は $\cos\theta>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。各々，次の図から，θ の範囲を求める。

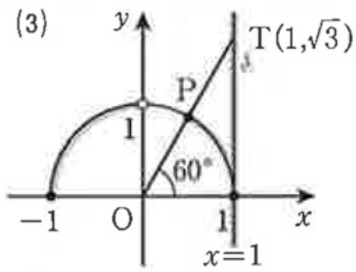
(1)



(2)



(3)



(1) $\boldsymbol{0^\circ\leqq\theta\leqq60^\circ,\ 120^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ}$　(2) $\boldsymbol{0^\circ\leqq\theta<45^\circ}$　(3) $\boldsymbol{0^\circ\leqq\theta\leqq60^\circ,\ 90^\circ<\theta\leqq180^\circ}$

119 発展例題

$y=\sin^2\theta-\cos\theta$

$\quad=(1-\cos^2\theta)-\cos\theta$

$\quad=-\cos^2\theta-\cos\theta+1$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ では $-1\leqq t\leqq1$ →❶ $\cdots$ ①

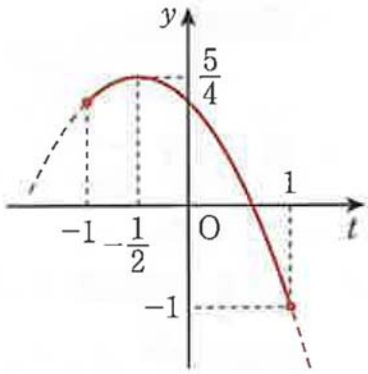
$$y=-t^2-t+1=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

①の範囲で，グラフは右の図の実線部分のようになり，y は

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$，

$t=1$ のとき最小値 -1

をとる。



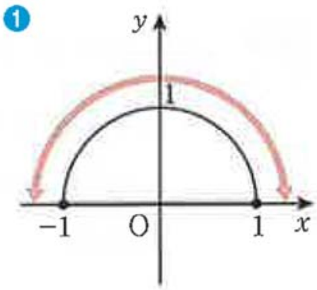
$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ であるから $\theta=120^\circ$ →❷

$t=1$のとき，$\cos\theta=1$ であるから $\theta=0^\circ$

答　**$\theta=120^\circ$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$，$\theta=0^\circ$ のとき最小値 -1**

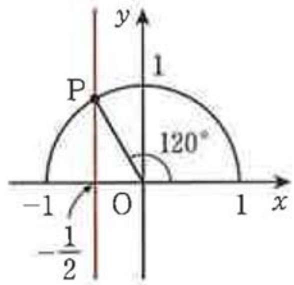
❶



$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$

❷次の図から。



類題 119-1 $y=\cos^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta+1$

$\quad=(1-\sin^2\theta)+\sqrt{3}\sin\theta+1$

$\quad=-\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta+2$

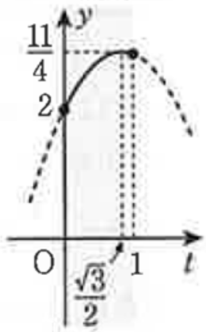
$\sin\theta=t$ とおくと，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$0\leqq t\leqq1$ で

$y=-t^2+\sqrt{3}t+2$

$\quad=-(t^2-\sqrt{3}t)+2$

$\quad=-\left\{\left(t-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}+2$

$\quad=-\left(t-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$



グラフは，右の図のようになるので

$t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{11}{4}$

このとき，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から　$\theta=60^\circ$，120°

$t=0$ のとき最小値 2

このとき，$\sin\theta=0$から　$\theta=0^\circ$，180°

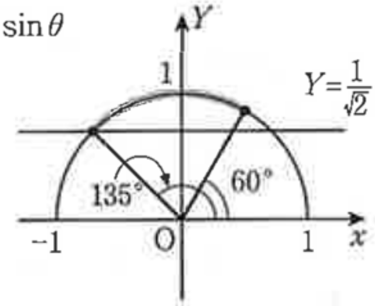
よって，**最大値 $\dfrac{11}{4}$ ($\theta=60^\circ$，120°)**

最小値 2 ($\theta=0^\circ$，180°)

類題 119-2 $y=\cos^2\theta+\sin\theta-1$

$\quad=(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-1$

$\quad=-\sin^2\theta+\sin\theta$



$\sin\theta=t$ とおくと，

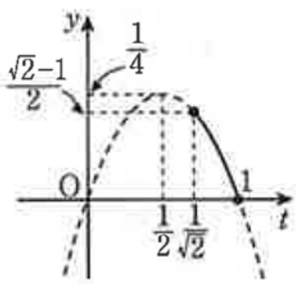
$60^\circ\leqq\theta\leqq135^\circ$ より，

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq t\leqq1$で

$y=-t^2+t$

$\quad=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

このグラフは右の図のようになる。



したがって

$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$